JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

2020./2021. mācību gads

2. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Kartītes ar skaitļiem

Ir dotas 16 kartītes, uz četrām uzrakstīts skaitlis 2, uz četrām – 3, uz četrām – 5 un uz četrām – 9. Saliec tās uz pelēkajiem kvadrātiem tā, lai izveidojas patiesas vienādības!

□	•	□	+	□	–	□	=	20
•		•		•		•		
□	•	□	+	□	–	□	=	4
+		+		+		+		
□	•	□	+	□	–	□	=	24
–		–		–		–		
□	•	□	+	□	–	□	=	22
=		=		=		=		
16		16		8		30		

2	2	2	2
3	3	3	3
5	5	5	5
9	9	9	9

KARTĪTES

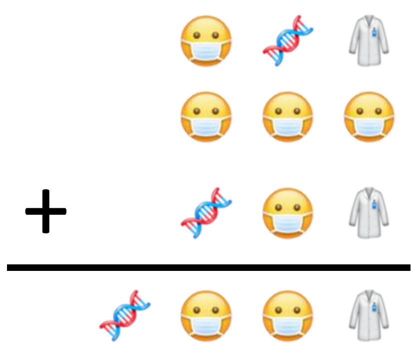
Atrisinājums. Kartīšu izvietojumu skat., piemēram, 1. att.

2	•	9	+	5	–	3	=	20
•		•		•		•		
5	•	2	+	3	–	9	=	4
+		+		+		+		
9	•	3	+	2	–	5	=	24
–		–		–		–		
3	•	5	+	9	–	2	=	22
=		=		=		=		
16		16		8		30		

1. att.

2. Rēbuss

Ar kādu simbolu dotajā rēbusā var būt aizstāts katrs cipars, ja vienādi simboli apzīmē vienādus ciparus, bet dažādi simboli – dažādus ciparus?



Atrisinājums. Trīs trīsciparu skaitļu summa nepārsniedz $3 \cdot 999 = 2997$, tātad 🧬 var būt 1 vai 2. Ievērojam, ka saskaitot skaitļu desmitus iegūst tikpat, cik saskaitot simtus; abos gadījumos rodas pārnesums, kas ir vienāds ar 🧬 . Tātad

😷 + 😷 + 🧬 + 🧬 = 🧬 · 10 + 😷

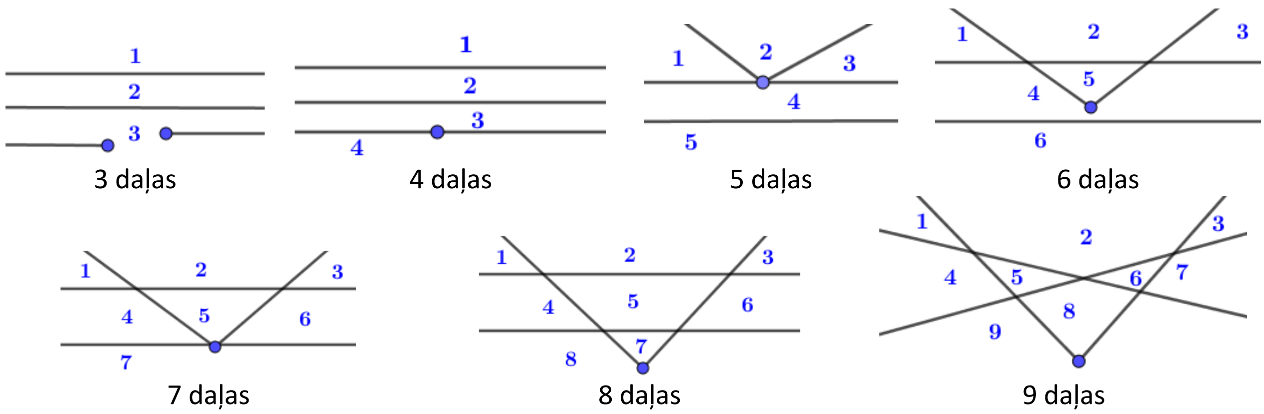
Apskatām abus gadījumus.

- Ja 🧬 $= 2$, tad 😷 + 😷 $+ 2 + 2 = 20 +$ 😷 jeb 😷 $= 16$, kas nevar būt, jo 😷 ir cipars.
- Ja 🧬 $= 1$, tad 😷 + 😷 $+ 1 + 1 = 10 +$ 😷 jeb 😷 $= 8$. Tā kā pārnesums uz simtu šķiru ir 🧬 $= 1$, tad arī pārnesums uz desmitu šķiru ir 1, tāpēc 🥼 $+ 8 +$ 🥼 $= 10 +$ 🥼 jeb 🥼 $= 2$.

Tātad rēbusam ir tikai viens atrisinājums 🧬 $= 1$, 😷 $= 8$, 🥼 $= 2$.

Iegaumē!
Ja uzdevumā ir jautājums „Kāds var būt...? ”; „Cik...? ”, tad uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām:
1. jāaplūko visi iespējamie gadījumi un atbildē jāuzrāda visas atrastās dažādās vērtības, kam uzdevuma prasības izpildās;
2. jāpamato, ka citu vērtību nav.

3. Taisnes un stari
Cik daļās plakni var sadalīt divas taisnes un divi stari?
Atrisinājums. Divas taisnes un divi stari plakni var sadalīt 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 daļās, piemēram, skat. 2. att.
Pamatosim, ka nevar iegūt mazāk kā 3 daļas. Ja plaknē novelk vienu taisni, tad plakne jau ir sadalīta 2 daļās, velkot otro taisni tā var būt vai nu paralēla jau novilktajai, tad plakne jau būs sadalīta 3 daļās, vai arī krustot pirmo taisni, tad plakne būs sadalīta 4 daļās. Zīmējot vēl divus starus, nevar iegūt, ka apgabalu skaits samazinās. Tātad mazākais apgabalu skaits ir 3.
Pamatosim, ka nevar iegūt vairāk kā 9 daļas. Divas taisnes var veidot lielākais 4 daļas, ja taisnes ir krustiskas. Zīmējam pirmo staru. Lai iegūtu lielāko daļu skaitu, šim staram ir jākrusto abas taisnes. Tādā gadījumā stars sākas vienā no plaknes daļām un, šķērsot vēl divas citas plaknes daļas, katru no šķērsotājām plaknes daļām, sadala lielākais divās daļās. Tātad kopā jau ir 6 daļas. Līdzīgi rīkojamies ar otro staru. Tas sākas kādā plaknes daļā un tam jāšķērso abas taisnes un pirmais stars, līdz ar to tas var šķērsot lielākais 3 plaknes daļas un katru no tām sadalīt 2 daļās. Tādējādi daļu skaits ir palielinājies par 3 un kopējais daļu skaits ir ne lielāks kā 9.

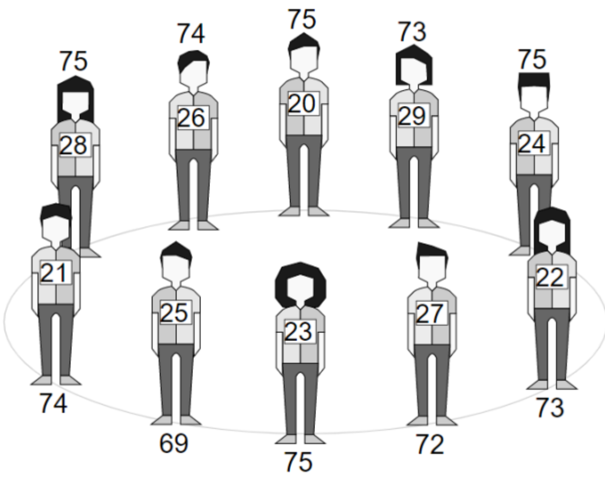


2. att.

4. Skriešanas sacensības

Jauno matemātiķu skolas 6.c klases desmit skolēni nolēma piedalīties skriešanas sacensībās, kas norisināsies skolas stadionā. Katrs dalībnieks no pieejamajiem numuriem no 20 līdz 29 izvēlējās sev vienu. Pirms sacensībām skolēni nolēma iesildīties un nostājās aplī. Vai var gadīties, ka jebkuru trīs pēc kārtas stāvošu skolēnu dalībnieka numuru summa ir mazāka nekā **a)** 76, **b)** 75?

Atrisinājums. a) Jā, skolēni var nostāties aplī prasītajā veidā, piemēram, skat. 3. att., kur virs vai zem skolēna norādīts viņa un viņam blakus stāvošo skolēnu dalībnieku numuru summa.



3. att.

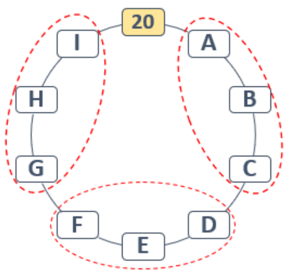
b) Pamatosim, ka dalībnieki nevar nostāties aplī prasītajā veidā.

Visu dalībnieku numuru summa ir $20+21+22+23+24+25+26+27+28+29=245$.

Pieņemsim, ka dalībnieki var nostāties aplī tā, ka jebkuru trīs pēc kārtas stāvošu skolēnu dalībnieka numuru summa ir mazāka nekā 75 jeb nepārsniedz 74. Apskatām to skolēnu, kuram ir numurs 20, pārējos 9 skolēnus sadalām grupās pa trīs dalībniekiem katrā (skat. 4. att.) un novērtējam visu dalībnieku numuru summu

$$20+(A+B+C)+(D+E+F)+(G+H+I)\leq 20+74+74+74=242<245.$$

Iegūta pretruna, jo, dažādos veidos saskaitot vienu un tos pašus skaitļus, iegūtas dažādas summas, bet tā nevar būt. Tātad nevar būt, ka jebkuru trīs pēc kārtas stāvošu dalībnieku numuru summa ir mazāka nekā 75.



4. att.

5. Dakstiņi

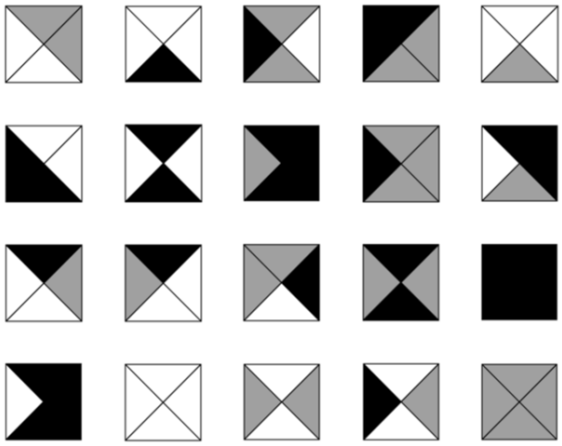
Dakstiņš ir kvadrāts, kam novilktas abas diagonāles un katrs no četriem trijstūriem ir iekrāsots vai nu baltā, vai pelēkā, vai melnā krāsā. Kvadrāta otra puse ir nokrāsota sarkana. Divi dakstiņi ir vienādi, ja vienu var iegūt no otra to rotējot, piemēram, 5. att. un 6. att. dotie dakstiņi ir vienādi, bet 6. att. un 7. att. dotie dakstiņi ir dažādi.

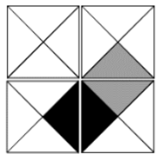

5. att.


6. att.


7. att.

Linardam ir komplekts ar 20 dakstiņiem (skat. 8. att.). Viņš paņēma četrus dakstiņus un izveidoja no tiem kvadrātu tā, ka vietās, kur dakstiņi saskaras, krāsas ir vienādas un trijstūru, kas atrodas pie lielā kvadrāta malām, krāsas arī ir vienādas (skat. 9. att.). Tā kā kvadrātam ir divas rindas ar 2 kvadrātiem katrā rindā, tad Linards to nosauca par 2×2 *visur saskaņotu* kvadrātu.


8. att.


9. att.

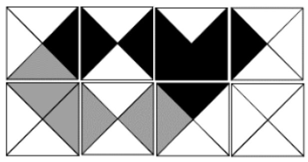
a) Izmantojot astoņus no Linarda dakstiņiem, uzzīmē *visur saskaņotu* taisnstūri!

b) Pavisam ir 24 dažādi dakstiņi. Uzzīmē tos četrus dakstiņus, kas nav Linarda dakstiņu komplektā!

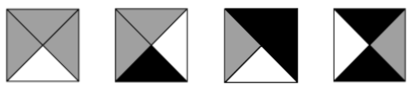
c) Izmantojot astoņus dakstiņus, starp kuriem ir vismaz viens dakstiņš, kas nav Linarda komplektā, uzzīmē *visur saskaņotu* taisnstūri!

d) Kāpēc nav iespējams izveidot *visur saskaņotu* 2×10 taisnstūri, ja drīkst izmantot jebkurus 20 atšķirīgus dakstiņus?

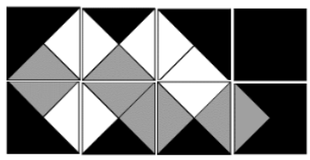
Atrisinājums. a) Visur saskaņotu taisnstūri skat., piemēram, 10. att.


10. att.

b) Linarda komplektā neiekļautie dakstiņi doti 11. att.


11. att.

c) Visur saskaņotu taisnstūri skat., piemēram, 12. att.


12. att.

d) Pieņemsim, ka eksistē *visur saskaņots* 2×10 taisnstūris un visi trijstūri, kas atrodas pie taisnstūra malām, ir baltā krāsā. Šādā gadījumā ir nepieciešami 20 dakstiņi, kas katrs satur vismaz vienu baltu trijstūri, bet tādu trijstūru skaits ir tikai 18. Līdz ar to neeksistē *visur saskaņots* 2×10 taisnstūris, kuram pie malām esošie trijstūri ir balti. Līdzīgi (simetrijas dēļ) arī gadījumos, ja pie taisnstūra malām esošie trijstūri būtu melni vai pelēki, iegūtu pretrunu. Tātad nav iespējams izveidot *visur saskaņotu* 2×10 taisnstūri.