Baltijas Ceļa atlases 2024 atrisinājumi

1.uzdevums Vai eksistē 2025 no nulles atšķirīgi skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}, a_{2025}$ ar īpašību, ka $a_{2025} = a_1$ un

$$\sum_{i=1}^{2024} \left(a_i^2 + \frac{1}{a_i^2} \right) + 2 \sum_{i=1}^{2024} \frac{a_i}{a_{i+1}} + 2024 = 2 \sum_{i=1}^{2024} \left(a_i + \frac{1}{a_i} \right)?$$

Atrisinājums. Vispirms ievērosim, ka

$$\sum_{i=1}^{2024} \frac{1}{a_i} = \sum_{i=1}^{2024} \frac{1}{a_{i+1}} \quad \text{un} \quad \sum_{i=1}^{2024} \frac{1}{a_i^2} = \sum_{i=1}^{2024} \frac{1}{a_{i+1}^2},$$

jo pēc dotā $a_{2025} = a_1$. Tā kā $\sum_{i=1}^{2024} 1 = 2024$, tad doto izteiksmi var pārveidot sekojoši

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{2024} \left(a_i^2 + \frac{1}{a_i^2} \right) + 2 \sum_{i=1}^{2024} \frac{a_i}{a_{i+1}} + 2024 = 2 \sum_{i=1}^{2024} \left(a_i + \frac{1}{a_i} \right) \\
\sum_{i=1}^{2024} \left(a_i^2 + \frac{1}{a_{i+1}^2} \right) + 2 \sum_{i=1}^{2024} \frac{a_i}{a_{i+1}} + \sum_{i=1}^{2024} 1 = 2 \sum_{i=1}^{2024} \left(a_i + \frac{1}{a_{i+1}} \right) \\
\sum_{i=1}^{2024} \left(a_i^2 + \frac{1}{a_{i+1}^2} + 2\frac{a_i}{a_{i+1}} + 1 - 2a_i - 2\frac{1}{a_{i+1}} \right) = 0 \\
\sum_{i=1}^{2024} \left(a_i + \frac{1}{a_{i+1}} - 1 \right)^2 = 0
\end{gathered}$$

Tā kā reāla skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad secinām, ka

$$a_i + \frac{1}{a_{i+1}} - 1 = 0$$

visiem $1 \leq i \leq 2024$. Izmantojot iegūto sakarību, varam iegūt, ka

$$a_i = 1 - \frac{1}{a_{i+1}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a_{i+2}}} = -\frac{1}{a_{i+2} - 1} = -\frac{1}{1 - \frac{1}{a_{i+3}} - 1} = a_{i+3}$$

visiem $1 \leq i \leq 2024$, kur $a_{2026} = a_2$ un $a_{2027} = a_3$. Līdz ar to

$$a_1 = a_4 = \cdots = a_{2023} = a_{2026} = a_2 = a_5 = \cdots = a_{2024} = a_{2027} = a_3 = a_6 = \cdots = a_{2022}$$

Citiem vārdiem sakot, visi skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}, a_{2025}$ ir vienādi savā starpā. Pieņemsim, ka tie visi ir vienādi ar a. Ievērosim, ka tādā gadījumā izpildās

$$a + \frac{1}{a} - 1 = 0 \quad \text{jeb} \quad a^2 - a + 1 = 0$$

taču šīm vienādojumam nav reālu sakņu, līdz ar to neeksistē tādi skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}, a_{2025}$, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

2.uzdevums Atrast lielāko naturālo skaitli k, kuram var atrast naturālu skaitli n un tādu n-tās pakāpes polinomu ar reāliem koeficientiem $P(x)$, ka polinomam $x^kP(x)+1$ ir $k+n$ dažādas reālas saknes.

Atrisinājums. Pieņemsim, ka kādam k izpildās uzdevuma nosacījums. Apzīmēsim polinoma $x^kP(x)+1$ saknes ar $x_1, x_2, \ldots, x_{k+n}$. Ievērojam, ka polinoma $x^kP(x)+1$ brīvais koeficients ir 1 un visiem $1 \le i < k$ koeficients pie x^i ir vienāds ar nulli.

Ja $k \ge 3$, tad no Vjeta teorēmas izriet, ka

$$x_1x_2\cdots x_{k+n} = 1, \qquad \sum_{1\le i\le k+n} \frac{x_1x_2\cdots x_{k+n}}{x_i} = 0, \qquad \sum_{1\le i<j\le k+n} \frac{x_1x_2\cdots x_{k+n}}{x_ix_j} = 0$$

Izdalot pēdējo 2 sakarību abas puses ar $x_1x_2\cdots x_{k+n} = 1$, iegūsim, ka

$$\sum_{1\le i\le k+n} \frac{1}{x_i} = 0, \qquad \sum_{1\le i<j\le k+n} \frac{1}{x_ix_j} = 0$$

Kāpinot pirmās vienādības abas puses kvadrāta, iegūsim, ka

$$\sum_{1\le i\le k+n} \frac{1}{x_i^2} + \sum_{1\le i<j\le k+n} \frac{2}{x_ix_j} = 0$$

Tā kā $\sum_{1\le i<j\le k+n} \frac{1}{x_ix_j} = 0$, tad secinām, ka

$$\sum_{1\le i\le k+n} \frac{1}{x_i^2} = 0.$$

Ievērosim, ka reālo skaitļu kvadrātu summa ir nenegatīva, tāpēc secinām, ka $\frac{1}{x_i^2} = 0$ visiem $1 \le i \le k+n$, kas nav iespējams.

Līdz ar to $k \le 2$. Ievērojam, ka pie $n = 1$ un $P(x) = 2x-5$, polinomam

$$x^2(2x-5)+1 = (2x-1)(x^2-2x-1)$$

ir $n+2 = 3$ dažādas reālas saknes $\frac{1}{2}, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$. Esam pierādījuši, ka $k \le 2$ un atraduši piemēru pie $k = 2$, kas apmierina uzdevuma nosacījumu, tāpēc $k = 2$ ir lielākais naturāls skaitlis, kuram izpildās uzdevumā prasītā īpašība.

3.uzdevums Atrast visas funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām visiem reāliem skaitļiem x un visiem polinomiem P ar reāliem koeficientiem izpildās apgalvojums: ja $P(f(x)) = 0$, tad $f(P(x)) = 0$.

Atrisinājums. Ievērosim, ka $f(x) = 0$ visiem reāliem skaitļiem x apmierina uzdevuma nosacījumus, jo tad $f(P(x)) = 0$ visiem reāliem skaitļiem x (tai skaitā tiem, kuriem $P(f(x)) = 0$). Pieņemsim, ka eksistē cita funkcija, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

Apgalvojums. Ja $f(x_0) = 0$ kaut kādam reālam skaitlim x_0, tad $x_0 = 0$.
Pierādījums. Pieņemsim, ka eksistē reāls skaitlis x_0 ar īpašību, ka $f(x_0) = 0$ un $x_0 \neq 0$. Aplūkosim polinomu $P(x) = kx$, kur k ir patvaļīga konstante. Ievērosim, ka $P(f(x_0)) = P(0) = 0$, tāpēc $f(P(x_0)) = f(kx_0) = 0$. Skaitlim k izejot cauri visiem reālo skaitļu kopa, skaitlis kx_0 arī iziet cauri visiem reālo skaitļu kopu, tāpēc secinām, ka $f(x) = 0$ visiem reāliem skaitļiem x, kas ir atrisinājums, ko mēs aplūkojam iepriekš. Līdz ar to secinām, ka $x_0 = 0$, kas arī bija jāpierāda.

Katram reālam skaitlim a aplūkosim polinomu $P(x) = x - f(a)$. Ievērosim, ka $P(f(a)) = f(a) - f(a) = 0$, tāpēc $f(P(a)) = f(a - f(a)) = 0$. No apgalvojuma izriet, ka $a - f(a) = 0$, kas nozīmē,k a $f(a) = a$ katram reālam skaitlim a. Viegli pārbaudīt, ka šī funkcija apmierina uzdevuma nosacījumus, jo ja $P(f(x)) = P(x) = 0$, tad $f(P(x)) = P(x) = 0$.

4.uzdevums Dots naturāls skaitlis $n \geq 2$ un pozitīvi reāli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, kuru summa ir vienāda ar 1. Apzīmēsim ar b skaitli $a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n$. Pierādīt, ka

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i-j)^2 a_i a_j \leq (n-b)(b-1).$$

Atrisinājums. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, tāpēc

$$\begin{aligned} n - b &= n(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n) = \\ &= (n-1)a_1 + (n-2)a_2 + \ldots + a_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} (n-i)a_i \end{aligned}$$

Līdzīgi varam iegūt, ka

$$\begin{gathered} b - 1 = a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \\ a_2 + 2a_3 \ldots + (n-1)a_n = \sum_{i=1}^{n} (i-1)a_i \end{gathered}$$

Līdz ar to

$$(n-b)(b-1) = \left(\sum_{i=1}^{n} (n-i)a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (i-1)a_i\right)$$

Iegūtajā izteiksmē apskatīsim koeficientu pie $a_i a_j$ kādiem $1 \leq i < j \leq n$. Ievērojam, ka tas būs vienāds ar koeficientu pie a_i pirmajā iekavā reiz koeficients pie a_j otrajā iekavā plus koeficients pie a_j pirmajā iekavā reiz koeficients pie a_i otrajā iekavā. Tātad

$$\begin{aligned} (n-b)(b-1) &= \left(\sum_{i=1}^{n} (n-i)a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (i-1)a_i\right) = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left((n-i)(j-1) + (n-j)(i-1)\right) a_i a_j = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(nj - n - ij + i + ni - n - ij + j\right) a_i a_j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left((i+j)(n+1) - 2ij - 2n\right) a_i a_j \end{aligned}$$

Tā kā $1 \leq i < j \leq n$, tad

$$\begin{aligned} (n-i)(1-i) \leq 0 &\implies i^2 \leq (n+1)i - n \\ (n-j)(1-j) \leq 0 &\implies j^2 \leq (n+1)j - n \end{aligned}$$

Saskaitot šīs abas nevienādības iegūsim, ka

$$\begin{gathered} i^2 + j^2 \leq (i+j)(n+1) - 2n \\ (i-j)^2 \leq (i+j)(n+1) - 2ij - 2n \end{gathered}$$

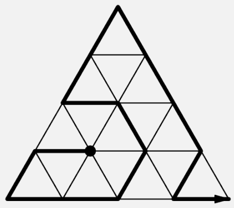
Līdz ar to

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i-j)^2 a_i a_j \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left((i+j)(n+1) - 2ij - 2n\right) a_i a_j = (n-b)(b-1),$$

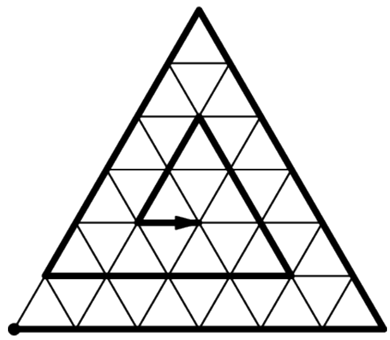
kas arī bija jāpierāda.

5.uzdevums No vienādmalu trijstūriem ar malas garumu 1 ir salikts vienādmalu trijstūris ar malas garumu n. Gliemezis Turbo, rāpojot tikai pa dotajiem nogriežņiem, vēlas apmeklēt katru no $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ lielā trijstūra virsotnēm tieši vienu reizi. Kāds ir mazākais iespējamais pagriezienu skaits, kas Turbo ir jāveic sava ceļā?

Piemērs. Dotajā attēlā ir redzams ceļš ar 9 pagriezieniem, kas veikts trijstūrī ar malas garumu 4.



Atrisinājums. Vispirms pieradīsim, ka Turbo var apmeklēt katru no lielā trijstūra virsotnēm, veicot tieši n pagriezienus: Turbo sāk jebkurā liela trijstūra virsotnē un turpina ceļu taisnā līnijā līdz pēdējai neapmeklētajai virsotnei, tad pagriežas un turpina kustību līdz visas virsotnes ir apmeklētas. Zemāk ir parādīts piemērs gadījumam, kad $n = 6$.



Pierādīsim, ka šāda stratēģija strādā visiem n, izmantojot matemātisko indukciju. Bāzes gadījums $n = 1$ ir triviāls. Pieņemsim, ka Turbo var apmeklēt visas virsotnes, veicot $n-1$ pagriezienus trijstūrī ar malas garumu $n-1$. Apskatīsim trijstūri ar malas garumu n. Veicot pirmo soli, Turbo "nogriež" vienu no oriģinālā trijstūra malām un apmeklē visas virsotnes uz tās taisnes. Pēc pirmā pagrieziena Turbo atlikušās virsotnes ir izvietotas trijstūrī ar malas garumu $n-1$ un uzsākot kustību pēc pagrieziena Turbo atradīsies vienā no liela trijstūra virsotnēm. Pēc indukcijas pieņēmuma, Turbo var apmeklēt visas šī trijstūra virsotnes ar $n-1$ pagriezieniem, tāpēc kopējais pagriezienu skaits būs tieši n.

Mums atliek pierādīt, ka Turbo nevar apmeklēt katru no virsotnēm, veicot mazāk par n pagriezieniem. Tā kā virziena maiņu skaits ir par vienu mazāks nekā segmentu skaits, kas veido ceļu, pierādīsim spēcīgāku apgalvojumu: jebkura taišņu kopa, kas pārklāj visas virsotnes, sastāv vismaz no $n+1$ taisnēm.

Pierādīsim šo apgalvojumu, izmantojot matemātisko indukciju. Bāzes gadījums $n = 1$ ir triviāls. Apskatīsim liela trijstūra malu ar garumu n. Ievērosim, ka uz šīs malas atrodas $n+1$ virsotne. Ja katra taisne ietver ne vairāk kā vienu no šīs malas virsotnēm, tad ir jāizmanto vismaz $n+1$ taisne, lai ietvertu visas šīs malas virsotnes. Taču, ja kāda taisne iet caur vismaz divām no šīs malas virsotnēm, tad šī taisne neietver nevienu no trijstūra ar malas garumu $n-1$ virsotnēm. Pēc indukcijas pieņēmuma trijstūrim ar malas garumu $n-1$ nepieciešamas vismaz n taisnes, tāpēc jebkurā gadījumā kopumā ir nepieciešamas vismaz $n+1$ taisne.

6.uzdevums Uz reālo skaitļu ass atrodas m nogriežņi. Katram nogrieznim abi galapunkti pieder veselo skaitļu kopai $\{1, 2, \ldots, 2024\}$ un visi nogriežņi ir dažāda garuma. Neviens nogrieznis pilnībā neatrodas cita nogriežņa iekšpusē, taču nogriežņi var daļēji pārklāties. Kāda ir lielākā iespējamā m vērtība?

Atrisinājums. Ievērosim, ka ja kādiem diviem nogriežņiem sakrīt viens no galapunktiem, tad viens no nogriežņiem pilnībā atrodas citā nogrieznī. Līdz ar to, lai izpildītos uzdevuma nosacījums, visiem nogriežņu vienādas puses galapunktiem jābūt atšķirīgiem.

Tā kā nogriežņu skaits ir galīgs, tad apskatīsim garāko nogriezni. Pieņemsim, ka garāka nogriežņa kreisais galapunkts atrodas skaitlī L un labais galapunkts atrodas skaitlī R. Visiem nogriežņiem ir dažādi garumi, tāpēc garākā nogriežņa garums būs vismaz m, kas nozīmē, ka $R - L \geq m$.

Ja kāda nogriežņa kreisais galapunkts atrodas skaitlī L vai pa labi no tā un tā labais galapunkts atrastos pa kreisi no skaitļa R, tad tas pilnībā atrastos garākajā nogrieznī, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem, līdz ar to tā labajam galapunktam jābūt pa labi no skaitļa R. Analoģiski, ja kāda nogriežņa labais galapunkts atrodas skaitlī R vai pa kreisi no tā, tad tā kreisajam galapunktam jābūt pa kreisi no skaitļa L.

Tas nozīmē, ka visiem nogriežņiem izņemot garāko vai nu kreisais galapunkts atrodas pa kreisi no L, līdz ar ko pastāv ne vairāk kā $L - 1$ šādi nogriežņi, vai nu tā labais galapunkts atrodas pa labi no R, līdz ar ko pastāv ne vairāk kā $2024 - R$ šādi nogriežņi. No tā var secināt, ka kopumā nogriežņu skaits nav lielāks par $(L-1)+(2024-R)+1 = 2024-(R-L) \leq 2024-m$. Līdz ar to $m \leq 2024 - m$, kas nozīmē, ka $m \leq 1012$.

Atliek parādīt, ka var atrast 1012 tādus nogriežņus, kas apmierinātu uzdevuma nosacījumus. To var panākt paņemot 1012 nogriežņus ar galapunktiem skaitļos k un $2k$, kur $1 \leq k \leq 1012$. Viegli pārliecināties, ka tāds nogriežņu novietojums patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.

7.uzdevums Māris un Filips spēlē spēli uz 100×100 rūtiņu laukumu, viens pēc otra veicot gājienus, Māris sāk pirmais. Sākotnēji laukums ir tukšs. Savā gājienā spēlētājs izvēlas veselu skaitli no 1 līdz 100^2, kas vēl nav uzrakstīts nevienā no rūtiņām un tukšu rūtiņu un ieraksta izvēlēto skaitli tajā. Kad tukšo rūtiņu vairs nav, Māris aprēķina skaitļu summu katrā rindā un viņa rezultāts ir lielākais no šiem 100 skaitļiem. Savukārt Filips aprēķina skaitļu summu katrā kolonnā un viņa rezultāts ir lielākais no šiem 100 skaitļiem. Māris uzvar, ja viņa rezultāts ir lielāks nekā Filipa rezultāts, savukārt Filips uzvar, ja viņa rezultāts ir lielāks nekā Māra rezultāts, bet, ja abi rezultāti ir vienādi, tad neviens spēlētājs neuzvar. Kurš spēlētājs (ja tāds ir) var, pareizi spēlējot, uzvarēt neatkarīgi no otra spēlētāja gājieniem?

Atrisinājums. Pierādīsim, ka Filips vienmēr var uzvarēt. Sadalīsim laukumu horizontālos 2×1 taisnstūros. Apzīmēsim pirmās rindas pirmos divus 2×1 taisnstūrus ar A un B. Filips veiks gājienus atbilstoši šādai stratēģijai

- Ja Māris ievieto skaitli x taisnstūrī A, tad Filips ievieto skaitli $100^2 + 1 - x$ taisnstūrī B.
- Ja Māris ievieto skaitli x taisnstūrī B, tad Filips ievieto skaitli $100^2 + 1 - x$ taisnstūrī A.
- Ja Māris ievieto skaitli x kādā citā taisnstūrī, tad Filips ievieto skaitli $100^2 + 1 - x$ tajā pašā taisnstūrī.

Ievērosim, ka Filips vienmēr var veikt gājienu, jo skaitļiem x un $100^2 + 1 - x$ ir dažāda paritāte, tāpēc $x \neq 100^2 + 1 - x$ jebkuram Māra izvēlētam skaitlim x. Spēles beigās visos taisnstūros, kas ir atšķirīgi no A un B, skaitļu summa būs vienāda ar $100^2 + 1$ un skaitļu summa taisnstūros A un B ir $2 \cdot (100^2 + 1)$. Tas nozīmē, ka spēles beigās skaitļu summa katrā rindā būs $50 \cdot (100^2 + 1)$, līdz ar to Māra rezultāts būs $50 \cdot (100^2 + 1)$ neatkarīgi no viņa stratēģijas.

Pieņemsim, ka Filips neuzvar, tad katrā rindā un katrā kolonnā uzrakstīto skaitļu summa ir $50 \cdot (100^2 + 1)$. Ievērosim, ka skaitļu summa taisnstūrī A nevar būt vienāda ar skaitļu summu taisnstūrī B, jo citādi tiem abiem jābūt vienādiem ar $100^2 + 1$, kas nav iespējams, jo ja viens no skaitļiem taisnstūrī A ir x, tad otrajam skaitlim taisnstūrī A jābūt $100^2 + 1 - x$, kas jau atrodas taisnstūrī B. Līdz ar to, nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka skaitļu summa taisnstūrī A ir lielāka par $100^2 + 1$. Tā kā visu pārējo taisnstūru skaitļu summa ir vienāda ar $100^2 + 1$, tad pirmo divu kolonu summa būs lielāka par $100 \cdot (100^2 + 1)$. Līdz ar to pēc Dirihlē principa pastāv kolona ar skaitļu summu lielāko par $50 \cdot (100^2 + 1)$, kas ir pretruna. Secinām, ka Filips uzvar.

8.uzdevums Karaļvalstī ir n pilsētas un dažas no tām ir savienotas ar ceļu savā starpā. Zināms, ka starp katrām divām pilsētām ir ne vairāk kā viens ceļš un kopējais ceļu skaits karaļvalstī ir lielāks nekā $\frac{nk}{2}$, kur k ir naturāls skaitlis. Parādiet, ka pastāv $k+2$ atšķirīgas pilsētas $C_1, C_2, \ldots, C_{k+2}$ ar īpašību, ka starp pilsētām C_i un C_{i+1} ir ceļš visiem $i = 1, 2, \ldots, k+1$.

Atrisinājums. Aplūkosim grafu, kurā virsotnes ir pilsētas un šķautnes ir ceļi starp pilsētām. Lai atrisinātu uzdevumu izmantosim indukciju pēc virsotņu skaita ar bāzes gadījumiem $n = 2$ un $n = 3$. Bāzes pierādījums ir triviāls. Tā kā pieradījuma izmantotā indukcija, grafu var uzskatīt par saistīto, jo gadījumā, ja tas nav saistīts, analoģiski argumenti izpildās saistības komponentēm. Apskatīsim grafu G ar n virsotnēm.

Ja $k = 1$, tad kopējs šķautņu skaits grafā ir lielāks nekā $\frac{n}{2}$. Tā kā dubultots šķautņu skaits ir vienāds ar grafa virsotņu pakāpju summa, tad visa grafa virsotņu pakāpju summa ir vismaz $n+1$, kas nozīmē, ka eksistē virsotne ar pakāpi vismaz 2. Šī virsotne un 2 virsotnes, ar kuram tā ir savienota, veido ceļu ar garumu 3.

Ja $k = 2$, tad G satur ciklu, jo maksimālais iespējamais šķautņu skaits grafā bez cikliem ir $n-1$. Līdz ar to vienmēr varēs atrast virsotni C, savienoto ar ciklu ar šķautni. Cikla minimālais garums ir 3, kopā ar C virsotni ceļa garums būs vismaz 4. Paliek apskatīt gadījumu, kad $k \geq 3$.

Apzīmēsim virsotnes v pakāpi ar $d(v)$, bet grafa G virsotņu skaitu ar $e(G)$. Virsotnei v, grafs $G - \{v\}$ apmierinās indukcijas pieņēmumu, tad un tikai tad, ja $e(G) - d(v) > \frac{(n-1)k}{2}$. Šajā gadījumā pēc indukcijas pieņēmuma, grafā $G - \{v\}$ varēs atrast ceļu ar garumu vismaz $k+2$.

Paliek apskatīt gadījumu, kad $e(G) - d(v) \leq \lfloor (n-1)k/2 \rfloor$ visām grafa virsotnēm v. Pēc uzdevuma nosacījuma $e(G) \geq \frac{nk}{2}$, tāpēc

$$d(v) \geq \lfloor nk/2 \rfloor + 1 - \lfloor (n-1)k/2 \rfloor \geq (k+1)/2$$

Apskatīsim grafa G garāko ceļu $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_t$. Ievērosim, ka $t \geq 2$, jo pretēja gadījumā katras virsotnes pakāpe nepārsniedz 1. Ja grafā pastāv šķautne $v_0 v_t$, virsotnes $v_0, v_1, \ldots, v_t$ veido ciklu.

Ievērosim, ka ja grafā eksistē cikls ar garumu t, tad ir iespējami atrast ceļu ar garumu $t+1$. Ja tas tā nebūtu, tad pieņemsim, ka cikls neietver visas G virsotnes. Tā kā G ir saistīts, vienmēr pastāv virsotne, savienota ar šo ciklu, radot garāku ceļu, kas ir pretruna. Līdz ar to, ja grafā grafā pastāv šķautne $v_0 v_t$, tad $t+1 = n$. Ievērosim, ka tādā gadījumā grafā ir ne vairāk kā $\binom{t+1}{2} = \binom{n}{2}$ šķautnes, bet tā kā katras virsotnes pakāpe ir vismaz $\frac{k+1}{2}$, tad

$$\binom{t+1}{2} \geq \frac{(t+1)k}{2} \implies t \geq k+1$$

Ja šķautne $v_0 v_t$ grafā nepastāv, tad visas virsotnes, kas ir savienotas ar v_0, pieder $\{v_1, v_2, \ldots, v_{t-1}\}$, jo pretējā gadījumā $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_t$ nav garākais ceļš grafā. Ievērosim, ka v_1 ir savienota ar v_0, kuras pakāpe $d(v_0) \geq (k+1)/2$, tāpēc starp $\{v_2, v_3, \ldots, v_{t-1}\}$ ir vismaz $(k-1)/2$ virsotnes, kas ir savienotas ar v_0. Ievērosim, ka ja virsotne v_0 ir savienota ar virsotni v_r, tad virsotne v_{r-1} nav savienota ar virsotni v_t, jo pretējā gadījumā rodas cikls ar garumu

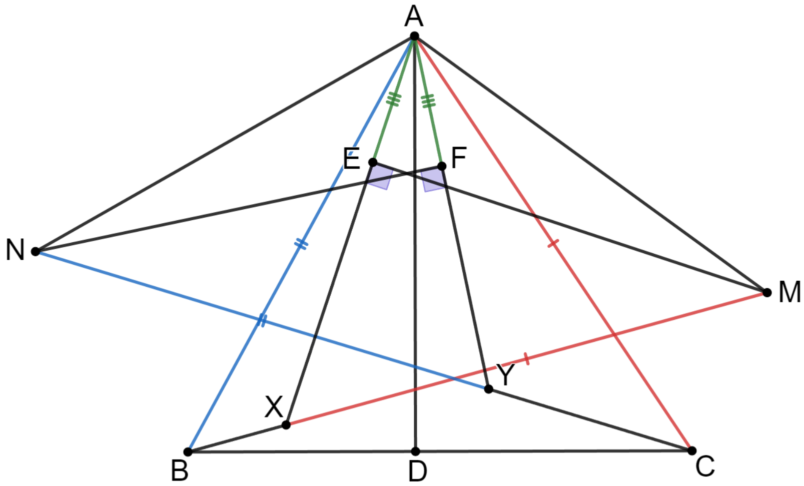
$$v_0, v_1, \ldots, v_{r-1}, v_t, v_{t-1}, \ldots, v_{r+1}, v_r, v_0$$

ar garumu t, līdz ar to grafā eksistēs ceļš ar garumu $t+1$ (to pierādījām iepriekš).Tā kā v_t nevar būt savienotā ne ar vienu virsotni ārpus $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{t-1}$ un ar virsotnēm, kas ir pa kreisi no v_0 kaimiņiem, tad $d(v_t) \leq \big((t-2) - \frac{k-1}{2}\big)$. Bet

$$d(v_t) \geq \frac{(k+1)}{2} \implies \frac{(k+1)}{2} \leq \left((t-2) - \frac{k-1}{2}\right) + 1 \implies t \geq k+1,$$

kas arī bija jāpierāda.

9.uzdevums Dots šaurleņķu trijstūris ABC, kurā ir novilkts augstums AD. Punkti X un Y izvēlēti trijstūra iekšpusē tā, ka $\angle BXA + \angle ACB = 180°$ un $\angle CYA + \angle ABC = 180°$, kā arī $CD + AY = BD + AX$. Punkts M ir izvēlēts uz stara BX tā, ka punkts X atrodas uz nogriežņa BM un $XM = AC$, savukārt punkts N ir uz stara CY tā, ka punkts Y atrodas uz nogriežņa CN un $YN = AB$. Pierādīt, ka $AM = AN$.



Atrisinājums. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $AX - CD = AY - BD$. Atliksim uz nogriežņiem AX un AY attiecīgi punktus E un F tā, ka $XE = CD$ un $YF = BD$. Tad

$$AE = AX - XE = AX - CD = AY - BD = AY - YF = AF$$

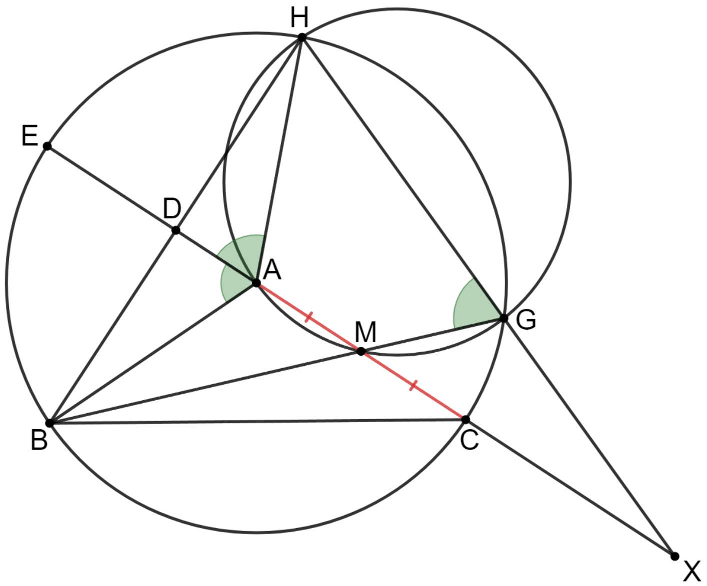
No uzdevuma nosacījumiem arī seko, ka $\angle ACD = \angle ACB = 180° - \angle BXA = \angle MXE$ un $\angle ABD = \angle ABC = 180° - \angle CYA = \angle NYF$. Esam ieguvuši, ka $\angle ACD = \angle MXE$, $XE = CD$ un $XM = AC$, kas nozīmē, ka trijstūri ACD un MXE ir vienādi pēc pazīmes *mlm*. Analoģiski varam iegūt, ka trijstūri ABD un NYF ir vienādi.

Secinām, ka $\angle XEM = \angle YFN = 90°$ un $EM = FN$ kā vienādos trijstūros atbilstošie elementi. Līdz ar to no Pitagora teorēmas izriet, ka

$$AM^2 = AE^2 + EM^2 = AF^2 + FN^2 = AN^2 \implies AM = AN,$$

kas arī bija jāpierāda.

10.uzdevums Dots vienādsānu trijstūris ABC, kuram $AB = AC$. Ar ω apzīmēsim riņķa līniju ar centru punktā A un rādiusu AB. Trijstūra ABC augstums un mediāna, kas vilkti no virsotnes B, krusto ω punktos H un G. Taisne GH krusto taisni AC punktā X. Pierādīt, ka punkts C ir nogriežņa AX viduspunkts.



Atrisinājums. Ar D un E apzīmēsim taisnes AC krustpunktus attiecīgi ar ω un taisni BH, un ar M apzīmēsim nogriežņu AC un BG krustpunktu. Tā kā $AB = AH$ kā rādiusi, tad trijstūris ABH ir vienādsānu, kas nozīmē, ka $\angle DAB = \angle DAH = \frac{1}{2}\angle BAH$. Ievērojam arī, ka $\angle BAH = 2\angle BGH$ kā centra leņķis. Līdz ar to

$$\angle MGH = \angle BGH = \frac{1}{2}\angle BAH = \angle DAH = 180^\circ - \angle MAH,$$

kas nozīmē, ka ap četrstūri $AMGH$ var apvilkt riņķa līniju. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka ap četrstūri $BCGH$ var apvilkt riņķa līniju, tāpēc no punkta pakāpes izriet, ka

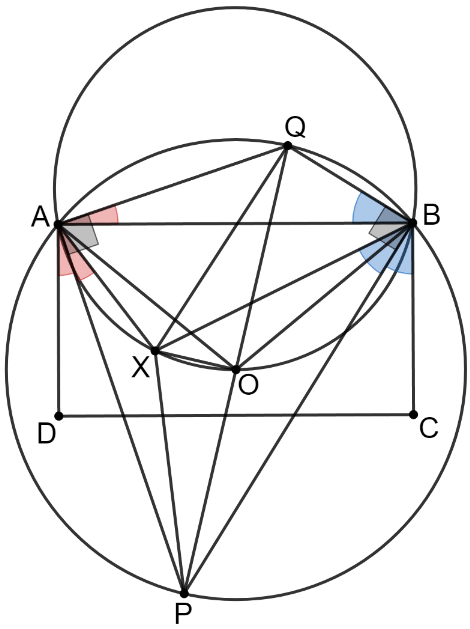
$$XM \cdot XA = XG \cdot XH = XC \cdot XE$$

Apzīmēsim ar r riņķa līnijas ω rādiusu. Tādā gadījumā

$$\begin{gathered}
XM \cdot XA = XC \cdot XE \\
\left(XC + \frac{r}{2}\right) \cdot \left(XC + r\right) = XC \cdot (XC + 2r) \\
XC^2 + \frac{3r}{2} \cdot XC + \frac{r^2}{2} = XC^2 + 2r \cdot XC \\
\frac{r^2}{2} = \frac{r}{2} \cdot XC \\
r = XC \\
AC = XC,
\end{gathered}$$

kas nozīmē, ka punkts C ir nogriežņa AX viduspunkts, kas arī bija jāpierāda.

11.uzdevums Punkts X atrodas taisnstūra $ABCD$ iekšpusē. Leņķu $\angle DAX$ un $\angle CBX$ bisektrises krustojas punktā P. Punkts Q izvēlēts tā, ka $\angle QAP = \angle QBP = 90°$. Pierādīt, ka $PX = QX$.



Atrisinājums. Apzīmēsim $\angle PAD = \angle PAX = \alpha$ un $\angle PBC = \angle PBX = \beta$. Ievērosim, ka

$$\angle QAB = \angle QAP - \angle BAP = 90° - (\angle BAD - \angle PAD) = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$$

Līdzīgi varam iegūt, ka $\angle QBA = \beta$. Tā kā $\angle QAP = \angle QBP = 90°$, tad ap četrstūri $APBQ$ var apvilkt riņķa līniju ar diametru PQ. Ar O apzīmēsim šīs riņķa līnijas centru. Ievērosim, ka punkts O ir nogriežņa PQ viduspunkts.

Apgalvojums. Ap četrstūri $AXOB$ var apvilkt riņķa līniju.
Pierādījums. No centra leņķa īpašības izriet, ka $\angle QOA = 2\angle QBA = 2\beta$ un $\angle BOQ = 2\angle QAB = 2\alpha$, līdz ar to

$$\angle AOB = \angle QOA + \angle BOQ = 2\alpha + 2\beta$$

Tā kā $ABCD$ ir taisnstūris, tad $\angle BAX = 90° - 2\alpha$ un $\angle ABX = 90° - 2\beta$. Secinām no trijstūra AXB leņķu summas, ka

$$\angle AXB = 180° - \angle XAB - \angle XBA = 180° - (90° - 2\alpha) - (90° - 2\beta) = 2\alpha + 2\beta = 2\angle AOB$$

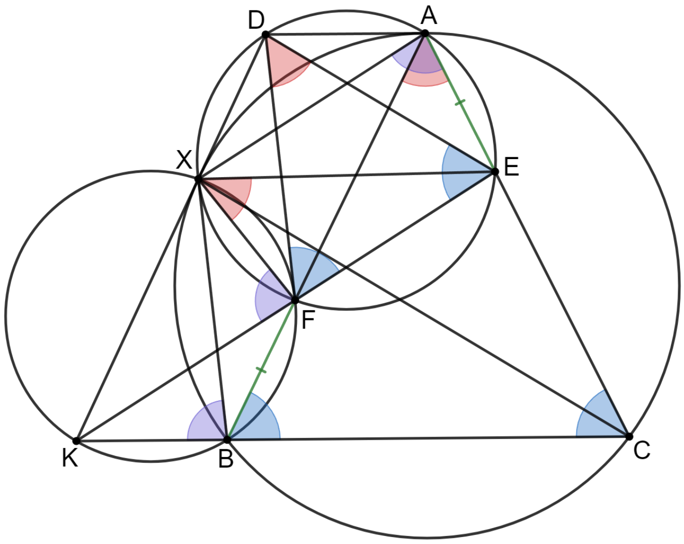
Līdz ar to ap četrstūri $AXOB$ var apvilkt riņķa līniju, kas arī bija jāpierāda.

Ievērosim, ka tā kā ap četrstūri $AXOB$ var apvilkt riņķa līniju, tad

$$\begin{aligned} \angle BAX + \angle BOX &= 180° \\ 90° - 2\alpha + \angle XOQ + \angle BOQ &= 180° \\ 90° - 2\alpha + \angle XOQ + 2\alpha &= 180° \\ \angle XOQ &= 90° \end{aligned}$$

Tas nozīmē, ka XO ir gan mediāna, gan augstums trijstūrī PXQ, līdz ar to tas ir vienādsānu trijstūris, kas nozīmē, ka $PX = QX$.

12.uzdevums Dots vienādsānu trijstūris ABC, kuram $AC = AB$. Punkti E un F atrodas attiecīgi uz malām AC, AB ar īpašību, ka $AE = BF$. Punkti D un A atrodas vienā un tajā pašā pusplaknē attiecībā pret taisni EF un $\triangle DFE \sim \triangle ABC$. Taisnes EF un BC krustojas punktā K. Pierādīt, ka taisne DK ir trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas pieskare.



Atrisinājums. Tā kā $\triangle DFE \sim \triangle ABC$, tad $\angle FDE = \angle BAC = \angle FAE$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $ADFE$ var apvilkt riņķa līniju. Ar X apzīmēsim ap četrstūri $ADFE$ un trijstūri ABC apvilkto riņķa līniju krustpunktu.

Apgalvojums. Punkti D, X, K atrodas uz vienas taisnes.
Pierādījums. Tā kā ap četrstūriem $AXBC$ un $AXFE$ var apvilkt riņķa līnijas, tad

$$\angle XBK = \angle XAC = \angle XAE = \angle XFK,$$

kas nozīmē, ka ap četrstūri $BFXK$ var apvilkt riņķa līniju. Secinām, ka $\angle KXF = \angle ABC$. Tā kā $\triangle DFE \sim \triangle ABC$ un ap četrstūri $DEFX$ var apvilkt riņķa līniju, tad

$$\angle ABC = \angle ACB = \angle DEF = 180^\circ - \angle DXF$$

Līdz ar to

$$\angle KXF = \angle ABC = 180^\circ - \angle DXF \implies \angle KXF + \angle DXF = 180^\circ,$$

kas nozīmē, ka punkti D, X, K atrodas uz vienas taisnes, kas arī bija jāpierāda.

Apgalvojums. Taisne DK pieskaras punktā X trijstūra ABC apvilktai riņķa līnijai.
Pierādījums. Ievērosim, ka

$$\angle XBF = \angle XBA = \angle XCA = \angle XCE$$
$$\angle BFX = 180^\circ - \angle XFA = 180^\circ - \angle XEA = \angle CEX$$

Tas nozīmē, ka $\triangle BFX \sim \triangle CEX$ pēc pazīmēs *ll*. Tādā gadījumā

$$\frac{BF}{FX} = \frac{CE}{EX} \implies \frac{AE}{FX} = \frac{AF}{EX} \implies \frac{AE}{AF} = \frac{FX}{EX}$$

kā līdzīgos trijstūros atbilstošie elementi. Tā kā $\angle EXF = \angle EAF$, tad $\triangle FXE \sim \triangle EAF$ pēc pazīmes *mlm*. Ņemot vērā to, ka šiem diviem trijstūriem viens attiecīgo malu pāris sakrīt, tad šie divi trijstūri ir vienādi. Līdz ar to $AE = XF$, tāpēc $AX \parallel EF$, jo ap četrstūri $AEFX$ var apvilkt riņķa līniju. Tas nozīmē, ka

$$\angle KXB = \angle KFB = \angle AFE = \angle FAX = \angle BAX,$$

kas nozīmē, ka taisne KX pieskaras trijstūra ABC apvilktās riņķa līnijas, kas arī bija jāpierāda.

13.uzdevums Dota funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kurai n dalās ar $f(n)$ visiem naturāliem n un visiem naturāliem skaitļiem m un n izpildās

$$\text{MKD}(nf(n^2), f(m^2)) = nf(mn).$$

Atrodiet izteiksmes $f(2024)$ lielāko iespējamo vērtību.

Piezīme. Ar $\text{MKD}(a, b)$ apzīmē skaitļu a, b mazāko kopīgo dalāmo. Piemēram, $\text{MKD}(15, 21) = 105$.

Atrisinājums. Apzīmēsim doto vienādību ar $P(n, m)$. Tā kā katram naturālam skaitlim n skaitlis $f(n)$ dala skaitli n, tad $f(1) = 1$, jo vieniniekam ir tikai viens dalītājs. Aplūkosim $P(n, 1)$

$$\begin{gathered}\text{MKD}(nf(n^2), f(1^2)) = nf(n)\\ \text{MKD}(nf(n^2), 1) = nf(n)\\ nf(n^2) = nf(n)\\ f(n^2) = f(n)\end{gathered}$$

Līdz ar to vienādību $P(n, m)$ mēs varam pārrakstīt kā

$$\text{MKD}(nf(n), f(m)) = nf(mn).$$

Apgalvojums. Visiem naturāliem skaitļiem n, k izpildās $f(n^k) = f(n)$.
Pierādījums. Pierādīsim prasīto, izmantojot matemātisko indukciju pa k. Ievērosim, ka bāze priekš $k = 2$ mums jau ir pierādīta. Pieņemsim, ka $f(n^k) = f(n)$, tad no $P(n, n^k)$ izriet, ka

$$\begin{gathered}\text{MKD}(nf(n), f(n^k)) = nf(n^{k+1})\\ \text{MKD}(nf(n), f(n) = nf(n^{k+1})\\ nf(n) = nf(n^{k+1})\\ f(n) = f(n^{k+1})\end{gathered}$$

No matemātiskās indukcijas principa izriet, ka prasītais ir pierādīts.

Apgalvojums. Ja $\text{LKD}(a, b) = 1$, tad $f(ab) = f(a)f(b)$.
Pierādījums. Aplūkosim naturālus skaitļus a, b ar īpašību, ka $\text{LKD}(a, b) = 1$. Ievērosim, ka, tādā gadījumā $\text{LKD}(f(a), f(b)) = 1$, jo pretējā gadījumā eksistē pirmskaitlis p ar īpašību, ka $p \mid f(a)$ un $p \mid f(b)$. Taču no uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $p \mid f(a) \mid a$ un $p \mid f(b) \mid b$, kas ir pretrunā ar to, ka $\text{LKD}(a, b) = 1$. Ievērosim, ka no līdzīga argumenta izriet arī, ka $\text{LKD}(a, f(b)) = 1$, kas nozīmē, ka $\text{LKD}(af(a), f(b)) = 1$. Tādā gadījumā no $P(a, b)$ iegūstam, ka

$$\begin{gathered}\text{MKD}(af(a), f(b)) = af(ab)\\ af(a)f(b) = af(ab)\\ f(a)f(b) = f(ab),\end{gathered}$$

kas arī bija jāpierāda.

Izteiksim skaitli n formā $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, kur visi $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ir dažādi pirmskaitļi. No iegūtajiem apgalvojumiem izriet, ka

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) = f(p_1^{\alpha_1}) \cdot f(p_2^{\alpha_2}) \cdots f(p_k^{\alpha_k}) = f(p_1) \cdot f(p_2) \cdots f(p_k)$$

Tā kā $f(p_i) \mid p_i$, tad secinām, ka $f(p_i) \in \{1, p_i\}$ visiem $1 \leq i \leq k$. Līdz ar to

$$f(2024) = f(2^3 \cdot 11 \cdot 23) = f(2) \cdot f(11) \cdot f(23) \leq 2 \cdot 11 \cdot 23 = 506$$

Atliek pierādīt, ka eksistē funkcija, kas apmierina uzdevuma nosacījumus un kurai $f(2024) = 506$. Aplūkosim funkciju

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{ja } n \text{ ir pirmskaitlis} \\ \prod_{p|n} f(p) & \text{citādi} \end{cases}$$

Ievērosim, ka $f(n) \mid n$ un

$$\text{MKD}(nf(n^2), f(m^2)) = n \cdot \left(\prod_{p|n^2 \text{ vai } p|m^2} f(p) \right) = n \cdot \left(\prod_{p|n \text{ vai } p|m} f(p) \right) = nf(mn),$$

kas nozīmē, ka funkcija apmierina uzdevuma nosacījumus. Tā kā

$$f(2024) = f(2) \cdot f(11) \cdot f(23) = 2 \cdot 11 \cdot 23 = 506,$$

tad secinām, ka 506 ir lielākā iespējamā skaitļa $f(2024)$ vērtība.

14.uzdevums Ar $S(x)$ apzīmēsim naturāla skaitļa x ciparu summu. Pierādīt, ka katram naturālam skaitlim n eksistē tāds naturāls skaitlis m, ka $\frac{S(m^2)}{S(m)} = n$.

Atrisinājums. Patvaļīgam skaitlim n definēsim naturālo skaitļu virkni $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ar īpašību, ka $a_i > 2a_{i-1}$ visiem $2 \leq i \leq n$. Pierādīsim, ka skaitlis $m = \sum_{i=1}^{n} 10^{a_i}$ apmierina uzdevuma nosacījumus. Ievērosim, ka $S(m) = n$, tāpēc, ja mēs pierādīsim, ka $S(m^2) = n^2$, tad uzdevums būs atrisināts. Ievērosim, ka

$$m^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} 10^{a_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 10^{a_i+a_j} = \sum_{k=1}^{n} 10^{2a_k} + \sum_{i>j} 2 \cdot 10^{a_i+a_j}$$

Apgalvojums. Ja $x \geq y$, $z > w$ un $a_x + a_y = a_z + a_w$, tad $x = z$ un $y = w$.
Pierādījums. Pieņemsim, ka $x > z$. Tad

$$a_x = a_z + a_w - a_y < a_z + a_w < a_{x-1} + a_{x-1} < a_x,$$

kas ir pretruna. Savukārt, ja pieņemam, ka $x < z$, tad

$$a_z = a_x + a_y - a_w < a_x + a_y \leq a_{z-1} + a_{z_1} < a_z,$$

kas ir pretruna. Secinām, ka $x = z$. Tas nozīmē, ka

$$\begin{aligned} a_x + a_y &= a_z + a_w \\ a_x + a_y &= a_x + a_w \\ a_y &= a_w \\ y &= w, \end{aligned}$$

jo virkne $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir stingri augoša.

No pierādīta apgalvojuma seko, ka summā $\sum_{i>j}^{n} 10^{a_i+a_j}$ katra desmitnieka pakāpe parādīsies tieši vienu reizi. Ievērosim arī, ka $10^{2a_k} \neq 10^{a_i+a_j}$ jebkuriem k un $i > j$. Secinām, ka

$$S\left(\sum_{k=1}^{n} 10^{2a_k} + \sum_{i>j}^{n} 2 \cdot 10^{a_i+a_j}\right) = n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2,$$

jo summā $\sum_{k=1}^{n} 10^{2a_k}$ ir n saskaitāmie, katrs no kuriem pievieno vieninieku un summā $\sum_{i>j}^{n} 2 \cdot 10^{a_i+a_j}$ ir $\frac{n(n-1)}{2}$ saskaitāmie, katrs no kuriem pievieno divnieku un tā kā visas desmitnieka pakāpes ir dažādas, tad tās nepārklājas. Līdz ar to esam pierādījuši, ka $S(m^2) = n^2$.

15.uzdevums Dots naturāls skaitlis n un pirmskaitlis q. Pierādīt, ka skaitlis $n^q+(\frac{n-1}{2})^2$ nevar būt vienāds ar skaitļa q naturālu pakāpi.

Atrisinājums. Ievērosim, ka n ir nepāra skaitlis. Vispirms aplūkosim gadījumu, kad $q = 2$. Pieņemsim, ka $n = 2k + 1$, kur k ir nenegatīvs vesels skaitlis. Tādā gadījumā skaitlis

$$n^2 + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = (2k+1)^2 + k^2 = 5k^2 + 4k + 1$$

ir divnieka pakāpe. Ja šī divnieka pakāpe ir lielāka par 2^1, tad skaitlim $5k^2 + 4k + 1$ ir jādalās ar vismaz 4. Taču $5k^2 + 4k + 1 \equiv k^2 + 1 \in \{1, 2\} \pmod 4$, kas nozīmē, skaitlis $5k^2 + 4k + 1$ ar 4 nedalās. Secinām, ka $5k^2+4k+1 = 2$, bet šim vienādojumam nav nenegatīvu veselu sakņu.

Risinājuma mums noderēs sekojoša lemma.

Lemma. Ja a, b ir naturāli skaitļi un $a + b$ ir skaitļa q naturāla pakāpe, tad $\nu_q(a) = \nu_q(b)$.
Pierādījums. Pieņemsim pretējo, ka $\nu_q(a) \neq \nu_q(b)$. Tādā gadījumā $\nu_q(a) = x$, $\nu_q(b) = y$ un, nezaudējot vispārīgumu, $x > y$. Tas nozīmē, ka $a = q^x m$ un $b = q^y n$, kur m, n ir naturāli skaitļi ar īpašību, ka $q \nmid m$, $q \nmid n$ pēc valuācijas definīcijas. Ievērosim, ka

$$a + b = q^y(q^{x-y}m + n)$$

Taču $q \nmid q^{x-y}m + n$ un $q^{x-y}m + n > 1$, kas nav iespējams, jo visiem $a + b$ dalītājiem jābūt q pakāpēm, tas ir, jādalās ar q, vai arī jābūt vienādiem ar 1. Secinām, ka mūsu pieņēmums ir aplams, līdz ar to $\nu_q(a) = \nu_q(b)$.

Aplūkojam gadījumu, kad $q \neq 2$. No Mazās Fermā teorēmas izriet, ka $0 \equiv n^q + (\frac{n-1}{2})^2 \equiv n + (\frac{n-1}{2})^2 = \frac{(n+1)^2}{4}$. Tas nozīmē, ka $q \mid \frac{(n+1)^2}{4} \implies q \mid (n+1)^2 \implies q \mid n+1$.

Pārveidosim doto izteiksmi

$$n^q + (\frac{n-1}{2})^2 = n^q + 1 + (\frac{n-1}{2})^2 - 1 = n^q + 1 + \frac{(n+1)(n-3)}{4}$$

Ievērosim, ka no LTE lemmas izriet, ka

$$\nu_q(n^q + 1) = \nu_q(n+1) + \nu_q(q) = \nu_q(n+1) + 1$$

Savukārt ievērosim, ka $n - 3$ ar q nedalās, jo pretējā gadījumā $q \mid n - 3$, $q \mid n + 1$, kas nozīmē, ka $q \mid n + 1 - (n - 3) = 4$, no kurienes izriet, ka $q = 2$, ko mēs jau apskatījām iepriekš. Līdz ar to secinām, ka

$$\nu_q\left(\frac{(n+1)(n-3)}{4}\right) = \nu_q(n+1) + \nu_q(n-3) - \nu_q(4) = \nu_q(n+1)$$

Līdz ar to pielietojot lemmu priekš $a = n^q + 1$ un $b = \frac{(n+1)(n-3)}{4}$ iegūstam pretrunu, jo $\nu_q(a) = \nu_q(n+1) + 1 > \nu_q(n+1) = \nu_q(b)$. Atliek pārbaudīt gadījumus, kad $n = 1, 2, 3$, jo tad skaitlis $b = \frac{(n+1)(n-3)}{4}$ nav naturāls un lemmu pielietot nedrīkst. Atcerēsimies, ka skaitlis n ir nepāra, tāpēc jāapskata tikai gadījumi $n = 1$ un $n = 3$. Abos gadījumos iegūstam, ka $q \mid n + 1 = 2$ vai $q \mid n + 1 = 4$, kas nozīmē, ka $q = 2$, ko jau apskatījām iepriekš.

16.uzdevums Saliktu nepāra naturālu skaitli n sauksim par *latvisku*, ja visus tā dalītājus var sadalīt pāros tā, ka katrā pāri esošu skaitļu summa ir divnieka pakāpe un katrs dalītājs ir tieši vienā pāri. Atrast visus latviskus skaitļus.

Atrisinājums. Vispirms pierādīsim, ka skaitlis n ir kvadrātbrīvs. Izteiksim skaitli n formā $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, kur $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ir naturāli skaitļi un $p_1, p_2, \ldots, p_k$ dažādi pirmskaitļi. Pieņemsim, ka n nav kvadrātbrīvs, tad vismaz viens no skaitļiem $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ir lielāks par 1. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka $\alpha_1 > 1$.

Skaitlim n ir $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ dažādu dalītāju. Ievērosim, ka $(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ no šiem dalītājiem nesatur pirmreizinātāju p_1, kas nozīmē, ka $\alpha_1 \cdot (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ no šiem dalītājiem satur pirmreizinātāju p_1. Ievērosim, ka

$$\frac{\alpha_1 \cdot (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)}{(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 1} > \frac{1}{2},$$

kas nozīmē, ka vairāk nekā puse no skaitļa n dalītājiem dalās ar p_1. Pieņemsim, ka mēs varam sadalītu skaitļa n dalītājus atbilstoši uzdevuma nosacījumiem. Pēc Dirihlē principā vismaz vienā pāri abi skaitļi dalās ar p_1, kas nozīmē, ka to summa dalās ar p_1, tāpēc tā nevar būt divnieka pakāpe. Secinām, ka mūsu pieņēmums ir aplams, līdz ar to skaitlis n ir kvadrātbrīvs.

Secinām, ka $n = p_1 \ldots p_k$, kur $p_1 < \ldots < p_k$ ir pirmskaitļi. Pieņemsim, ka $k \geq 3$ un skaitļa n dalītājus var sadalīt uzdevuma prasītā veidā. Ievērosim, ka skaitlis $p_1 \cdots p_k$ ir pārī ar skaiti 1, jo jebkurš cits dalītājs saturētu kādu pirmreizinātāju p_i, ar ko dalās ar $p_1 \cdots p_k$, tāpēc to summa dalās ar p_i, kas nozīmē, ka tā nav divnieka pakāpe. No līdzīga argumenta, ņemot vērā to, ka skaitlim 1 jau ir pāris, seko, ka skaitlis $p_2 \ldots p_{k-1}$ ir pārī ar skaitli p_1. Apzīmēsim

$$p_1 \cdots p_k + 1 = 2^a \quad \text{un} \quad p_2 \cdot p_k + p_1 = 2^b$$

Ievērosim, ka varam arī apzīmēt $x = p_2 \cdots p_k$ un $y = p_1$, no kurienes seko, ka $xy + 1 = 2^a$ un $x + y = 2^b$. Viegli pamanīt, ka $2^a = xy + 1 > x + y = 2^b$, tāpēc $x + y \mid xy + 1$. Tā kā $x \equiv -y \pmod{x + y}$, tad iegūstam, ka

$$0 \equiv xy + 1 \equiv 1 - y^2 \pmod{x + y}$$

Secinām, ka $p_2 \cdots p_k + p_1 = x + y \mid y^2 - 1 = p_1^2 - 1$, taču $p_1^2 < p_2 \cdots p_k$, jo $k \geq 2$, kas nozīmē, ka $0 < p_1^2 - 1 < p_2 \cdots p_k + 1$, tāpēc dalāmība nevar izpildīties.

Esam ieguvuši, ka $n = p_1 p_2$, kur $p_1 < p_2$ ir pirmskaitļi. Apzīmēsim $p_1 + p_2 = 2^b$ un $p_1 p_2 + 1 = 2^a$. Ievērosim, ka $b > 2$, jo pretējā gadījumā $p_1 + p_2 = 2$ vai $p_1 + p_2 = 4$, kam nav atrisinājuma nepāra pirmskaitļos. No iepriekšējās rindkopas argumenta izriet, ka $2^b = p_1 + p_2 \mid p_1^2 - 1 = (p_1 - 1)(p_1 + 1)$ un $2^b = p_1 + p_2 \mid p_2^2 - 1 = (p_2 - 1)(p_2 + 1)$. Ievērosim, ka $p_1 - 1, p_1 + 1$ un $p_2 - 1, p_2 + 1$ ir divi pēc kārtas sekojoši skaitļu pāri, kas nozīmē, ka kāds no šiem skaitļiem katrā pārī dalās ar 2, bet nedalās ar 4, kas nozīmē, ka otrs skaitlis attiecīgajā pārī dalās ar 2^{b-1}. Apskatīsim visus iespējamos gadījumos

- Ja $p_1 - 1$ un $p_2 - 1$ abi dalās ar 2^{b-1}, tad $p_1 = 2^{b-1}x + 1$ un $p_2 = 2^{b-1}y + 1$, kur x, y naturāli nepāra skaitļi. Tas nozīmē, ka

$$p_1 p_2 + 1 = (2^{b-1}x + 1)(2^{b-1}y + 1) + 1 = 2^{2(b-1)} + 2^{b-1}x + 2^{b-1}y + 2$$

  Tā kā $b \geq 3$, tad pirmie trīs saskaitāmie noteikti dalās ar 4, bet pēdējais ar 4 nedalās. Tas nozīmē, ka $p_1 p_2 + 1 = 2$, kam nav atrisinājuma nepāra pirmskaitļos.

- Ja p_1+1 un p_2+1 abi dalās ar 2^{b-1}, tad $p_1 = 2^{b-1}x-1$ un $p_2 = 2^{b-1}y-1$, kur x, y ir nepāra naturāli skaitļi. Tas nozīmē, ka

  $$p_1p_2+1 = (2^{b-1}x-1)(2^{b-1}y-1)+1 = 2^{2(b-1)} - 2^{b-1}x - 2^{b-1}y + 2$$

  Tā kā $b \leq 3$, tad pirmie trīs saskaitāmie noteikti dalās ar 4, bet pēdējais ar 4 nedalās. Tas nozīmē, ka $p_1p_2+1 = 2$, kam nav atrisinājuma nepāra pirmskaitļos.

- Ja p_1+1,p_2-1 abi dalās ar 2^{b-1}, tad $p_1 = 2^{b-1}x-1$ un $p_2 = 2^{b-1}y+1$, kur x, y ir naturāli skaitļi. Ievērosim, ka

  $$p_1+p_2 = 2^{b-1}(x+y) = 2^b \implies x+y = 2$$

  Tas nozīmē, ka $x = y = 1$. Secinām, ka $p_1 = 2^{b-1}-1$ un $p_2 = 2^{b-1}+1$. Ievērosim, ka $2^{b-1}-1, 2^b, 2^{b-1}+1$ ir trīs pēc kārtas esoši skaitļi, tāpēc vismaz viens no tiem dalās ar 3. Ievērosim, ka 2^b ar 3 nedalās un to, ka $p_1 < p_2$, tāpēc iegūstam, ka $p_1 = 3$ un $p_2 = 5$. Tādā gadījumā $n = 15$, kas apmierina uzdevuma nosacījumos, jo mēs varam sadalīt pāros $(3, 5)$ un $(1, 15)$.

Vērtēšanas kritēriji

Vērtēšanas kritēriji 1.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **2 punkti** – pierādīts, ka $a_i + \frac{1}{a_{i+1}} - 1 = 0$ visiem $1 \leq i \leq 2024$.
  - ⋆ **1 punkts** – tika mēģināts atdalīt skaitļu kvadrātus (ne obligāti pareizā veidā)
  - ⋆ **1 punkts** – tika pareizi atdalīti skaitļu kvadrāti.
- **2 punkti** – pierādīts, ka $a_i = a_{i+3}$ visiem $1 \leq i \leq 2024$.
- **1 punkts** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 2.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – uzradīts piemērs pie $k = 2$.
- **1 punkts** – uzrakstītas sakarības priekš koeficientiem pie x^2, x un brīva locekļa, izmantojot Vjeta teorēmu.
- **3 punkts** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 3.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **3 punkti** – pierādīts, ka funkcija ir injektīva punktā 0.
- **2 punkti** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.
- **-1 punkts** – nav pārbaudītas atbildes. Ja skolēns ir uzminējis atbildes un tās pārbaudījis, tad par to punkts netiek saņemts.

Vērtēšanas kritēriji 4.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **3 punkti** – izteiksme $(n-b)(b-1)$ izteikta, izmantojot $a_i a_j$ summu
  - ⋆ **1 punkts** – iegūta izteiksmes priekš $n - b$ un $b - 1$, izmantojot koeficientus a_i.
  - ⋆ **2 punkti** – pareizi atvērtas iekavas un iegūti koeficienti pie $a_i a_j$.
- **2 punkti** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 5.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **2 punkti** – uzrādīta konstrukcija un pamatota, ka tā strādā.
- **3 punkti** – pierādīts, ka prasīto nevar izdarīt mazāk kā n pagriezienos.

Vērtēšanas kritēriji 6.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – par pareizu konstrukciju un atbildi.
- **4 punkti** – pierādīts, ka nevar būt vairāk kā 1012 nogriežņi.
  - ⋆ **1 punkts** – par ideju aplūkot garāko nogriezni

Vērtēšanas kritēriji 7.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – par mēģinājumiem spēlēt simetriski, pat ja tas nedod pareizu stratēģiju.
- **4 punkti** – uzrādīta stratēģijai, ar kuru Filips var uzvarēt un pamatots, ka tā strādā.

Vērtēšanas kritēriji 8.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – atrisināti gadījumi, kad $k = 1$ un $k = 2$.
- **1 punkts** – pierādīts, ka $d(v) \geq \frac{k+1}{2}$.
- **1 punkts** – pierādīts, ka garākais ceļš neveido ciklu.
- **2 punkts** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 9.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – pierādīts, ka $\angle ACD = \angle MXE$ vai $\angle NYF = \angle ABD$.
- **2 punkti** – definēti punkti E un F.
- **1 punkts** – pierādīts, ka trijstūri ACD un MXE ir vienādi un trijstūri ABD un NYF ir vienādi.
- **1 punkts** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 10.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **2 punkti** – ieviests punkts M un pierādīts, ka ap četrstūri $AMGH$ var apvilkt riņķa līniju.
- **1 punkts** – pierādīts, ka $XM \cdot XA = XC \cdot XE$.
- **2 punkti** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 11.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – pierādīts, ka $\angle QAB = \alpha$ vai $\angle QBA = \beta$.
- **1 punkti** – ieviests punkts O.
- **1 punkts** – pierādīts, ka ap četrstūri $ABOX$ var apvilkt riņķa līniju.
- **1 punkts** – pierādīts, ka $\angle XOQ = 90°$.
- **1 punkts** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 12.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – ieviests punkts X un pierādīts, ka ap četrstūri $AXBC$ var apvilkt riņķa līniju.
- **1 punkts** – pierādīts, ka punkti D, X, K atrodas uz vienas taisnes.
- **2 punkts** – pierādīts, ka trijstūri FXE un EAF ir vienādi.
- **1 punkts** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam (šis punkts tiek iegūts arī gadījumos, kad uzdevums skolēns neieguva iepriekšējo rezultātu vai tam ekvivalentu, bet, pieņemot to, kas tas izpildās, pierādīja prasīto.)

Vērtēšanas kritēriji 13.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – par uzminētu atbildi un parādīto piemēru, pie kura dota vērtība tiek sasniegta.
- **1 punkts** – pierādīts, ka $f(n^k) = f(n)$ visiem naturāliem skaitļiem k un n.
- **1 punkts** – pierādīts, ka ja $\text{LKD}(a, b) = 1$, tad $f(a)f(b) = f(ab)$.
- **2 punkts** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 14.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – tiek aplūkoti skaitļi, kas sastāv no n vieniniekiem un daudz nullēm starp tiem.
- **1 punkts** – skaitlis m^2 ir izteikts kā desmitnieku pakāpju summa.
- **3 punkts** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 15.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – aplūkots gadījums, kad $q = 2$.
- **1 punkts** – pierādīts, ka $q \mid n + 1$.
- **3 punkts** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 16.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – pierādīts, ka n ir kvadrātbrīvs.
- **2 punkts** – pierādīts, ka $n = p_1p_2$, kur $p_1 < p_2$ ir pirmskaitļi.
- **1 punkts** – atrisināts gadījums, kad $n = p_1p_2$.
- **1 punkts** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.