Baltijas ceļš

2024. gada 16. novembris, Tartu, Igaunija Version: Latvian

Darba laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.
Izmantot drīkst tikai rakstīšanai un zīmēšanai paredzētos rīkus.

1. uzdevums. Dots reāls nenulles skaitlis α. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām visiem $x, y \in \mathbb{R}$ izpildās

$$xf(x+y) = (x+\alpha y)f(x) + xf(y).$$

2. uzdevums. Ar $\mathbb{R}^+$ apzīmēsim visu reālo pozitīvo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, kurām

$$\frac{f(a)}{1+a+ca} + \frac{f(b)}{1+b+ab} + \frac{f(c)}{1+c+bc} = 1$$

visiem tādiem $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, ka $abc = 1$.

3. uzdevums. Sākumā uz tāfeles ir uzrakstīti pozitīvi reāli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$. Vienā gājienā var izvēlēties divus no uzrakstītajiem skaitļiem x un y, nodzēst tos un vietā uzrakstīt skaitli $\dfrac{x^2+6xy+y^2}{x+y}$. Pēc 2023 gājieniem uz tāfeles būs palicis tieši viens skaitlis, apzīmēsim to ar c. Pierādīt, ka

$$c < 2024\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2024}\right).$$

4. uzdevums. Atrast lielāko reālo skaitli α, kuram visiem reāliem nenegatīviem skaitļiem x, y un z ir spēkā nevienādība:

$$(x+y+z)^3 + \alpha\left(x^2z + y^2x + z^2y\right) \geqslant \alpha\left(x^2y + y^2z + z^2x\right).$$

5. uzdevums. Atrast visus tādus reālos skaitļus λ, ka katra pozitīvu reālu skaitļu virkne $a_1, a_2, \ldots$, kurai visiem $n \geqslant 2024^{2024}$ izpildās

$$a_{n+1} = \lambda \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

ir ierobežota.

Piezīme: Pozitīvu reālu skaitļu virkne $a_1, a_2, \ldots$ ir *ierobežota*, ja eksistē tāds reāls skaitlis M, ka visiem $i = 1, 2, \ldots$ ir spēkā $a_i < M$.

6. uzdevums. Par *labirintu* sauksim alu sistēmu, kas sastāv no 2024 alām un 2023 koridoriem, katrs koridors savieno tieši divas alas, katras divas alas ir savienotas ar koridoru virkni, koridori ārpus alām nekrustojas.

Sākumā Ēriks atrodas koridorā, kas savieno kādas divas alas. Vienā gājienā viņš var iziet caur vienu no šīm divām alām un nokļūt citā koridorā, kas savieno to ar kādu trešo alu. Taču, kad viņš šo gājienu izdara, tad sākotnējais koridors maģiskā veidā pazūd, bet tā vietā parādās koridors, kas savieno patreizējā koridora beigas, ar sākotnējā koridora sākumu (t.i. ja Ēriks sākumā bija koridorā, kas savieno alas a un b un izgāja caur alu b koridorā, kas savieno alas b un c, tad koridors, kas savieno alas a un b pazudīs, bet tā vietā parādīsies koridors, kas savieno alas a un c).

Ērikam patīk labirinti un viņam prātā ir specifisks koridoru izkārtojums viņa nākamajam labirintam un viņš gribētu pārveidot patreizējo labirintu par viņa iedomāto labirintu. Pierādīt, ka ar atļautajiem gājieniem viņš to var izdarīt neatkarīgi no koridoru sākotnējā izkārtojuma un viņa sākotnējās atrašanās vietas.

7. uzdevums. No 45×45 rūtiņu lapas ir izgriezta centrālā rūtiņa. Noskaidrot, kādiem naturāliem n to var sagriezt $1 \times n$ un $n \times 1$ rūtiņu taisnstūros?

8. uzdevums. Doti naturāli skaitļi a, b un n, kam $a+b \leqslant n^2$. Alfrēds un Beatrise spēlē spēli uz (sākumā nenokrāsota) $n \times n$ rūtiņu laukuma.

- Vispirms Alfrēds izvēlas a rūtiņas un nokrāso tās zaļā krāsā.
- Pēc tam Beatrise izvēlas b vēl nenokrāsotas rūtiņas un nokrāso tās zilā krāsā.

Alfrēds uzvar, ja viņš var atrast ceļu no kreisās apakšējās rūtiņas uz labo augšējo rūtiņu, kam neviena rūtiņa nav zila (ceļš ir rūtiņu virkne, kurā katrām divām secīgām rūtiņām ir kopīga mala). Pretējā gadījumā uzvar Beatrise. Noskaidrojiet (atkarībā no a, b un n), kuram ir uzvarošā stratēģija.

9. uzdevums. Dota galīga kopa S. Naturālam skaitlim n teiksim, ka funkcija $f\colon S \to S$ ir *n-tā pakāpe*, ja eksistē tāda funkcija $g\colon S \to S$, ka visiem $x \in S$

$$f(x) = \underbrace{g(g(\ldots g(x)\ldots))}_{g \text{ pielietots } n \text{ reizes}}.$$

Zināms, ka funkcija $f\colon S \to S$ ir n-tā pakāpe jebkuram naturālam n. Vai no tā noteikti izriet, ka $f(f(x)) = f(x)$ visiem $x \in S$?

10. uzdevums. Bezgalīga rūtiņu lapa ir noorientēta pēc debespusēm, vienā no rūtiņām atrodas varde. Vienā gājienā varde var aizlēkt vienu vai divas rūtiņas tajā virzienā, kurā tā skatās, un tad pagriezties atbilstoši sekojošiem nosacījumiem:

1) ja tā aizlēca vienu rūtiņu, tad tā pagriežas 90° pa labi;
2) ja tā aizlēca divas rūtiņas, tad tā pagriežas 90° pa kreisi.

Vai varde galīgā gājienu skaitā var nonākt rūtiņā, kas atrodas tieši 2024 rūtiņas uz ziemeļiem, ja sākumā tā skatās uz:

a) ziemeļiem;
b) austrumiem?

11. uzdevums. Četrstūrim $ABCD$, kura diagonāles ir perpendikulāras, apvilkta riņķa līnija ar centru O. Punkti X un Y atrodas uz trijstūrim BOD apvilktās riņķa līnijas tā, ka $\sphericalangle AXO = \sphericalangle CYO = 90^\circ$. Punkts M ir AC viduspunkts. Pierādīt, ka BD pieskaras trijstūrim MXY apvilktajai riņķa līnijai.

12. uzdevums. Šaurleņķa trijstūrim ABC, kuram $AB < AC$, apvilkta riņķa līnija ω. Punkts M ir tā loka BC viduspunkts, kas satur punktu A, punkts $X \neq M$ izvēlēts uz ω tā, ka $AX = AM$. Punkti E un F ir izvēlēti attiecīgi uz malām AC un AB tā, ka $EX = EC$ un $FX = FB$. Pierādīt, ka $AE = AF$.

13. uzdevums. Šaurleņķa trijstūra ABC augstumi krustojas punktā H. Punkts D izvēlēts ārpus trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas tā, ka $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DCA$. Taisnei AB simetriskā taisne attiecībā pret taisni BD krusto taisni CD punktā X. Taisnei AC simetriskā taisne attiecībā pret taisni CD krusto taisni BD punktā Y. Taisnes, kas vilktas caur X un Y perpendikulāri attiecīgi AC un AB krustojas punktā P. Pierādīt, ka punkti D, P un H atrodas uz vienas taisnes.

14. uzdevums. Šaurleņķa trijstūrim ABC apvilkta riņķa līnija ω. Trijstūra ABC augstumi AD, BE un CF krustojas punktā H. Uz taisnes EF izvēlēts punkts K tā, ka $KH \parallel BC$. Pierādīt, ka punktam H simetriskais punkts attiecībā pret taisni KD atrodas uz ω.

15. uzdevums. Plaknē dota kopa, kas sastāv no $N \geqslant 3$ punktiem, nekādi trīs no tiem neatrodas uz vienas taisnes. Teiksim, ka trīs punkti A, B, C no šīs kopas veido *Baltijas trijstūri*, ja neviens cits punkts no šīs kopas neatrodas uz trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas.

Zināms, ka eksistē vismaz viens Baltijas trijstūris. Pierādīt, ka tādā gadījumā eksistē vismaz $\dfrac{N}{3}$ Baltijas trijstūri.

16. uzdevums. Atrast visus tādus saliktos skaitļus n, ka katru skaitļa n pozitīvo dalītāju d var izteikt kā $d = k^m + 1$, kur $k \geqslant 0$ un $m \geqslant 2$ ir veseli skaitļi.

17. uzdevums. Vai eksistē bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu četrinieku (a, b, c, d), ka skaitlis

$$a^{a!} + b^{b!} - c^{c!} - d^{d!}$$

ir pirmskaitlis un $2 \leqslant d \leqslant c \leqslant b \leqslant a \leqslant d^{2024}$?

18. uzdevums. Par bezgalīgu naturālu skaitļu virkni $a_1, a_2, \ldots$ zināms, ka $a_n \geqslant 2$ visiem $n \geqslant 1$, kā arī $a_{n+1} + a_n$ dalās ar a_{n+2} visiem $n \geqslant 1$. Pierādīt, ka bezgalīgi daudzi šīs virknes locekļi dalās ar vienu un to pašu pirmskaitli.

19. uzdevums. Vai eksistē naturāls skaitlis N, kas dalās ar vismaz 2024 dažādiem pirmskaitļiem un kura visi pozitīvie dalītāji $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = N$ ir tādi, ka skaitlis

$$\frac{d_2}{d_1} + \frac{d_3}{d_2} + \ldots + \frac{d_k}{d_{k-1}}$$

ir naturāls?

20. uzdevums. Naturāli skaitļi a, b un c apmierina vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} (ab-1)^2 = c\left(a^2+b^2\right) + ab + 1, \\ a^2 + b^2 = c^2 + ab. \end{cases}$$

a) Pierādīt, ka $c + 1$ ir naturāla skaitļa kvadrāts.

b) Atrast visus šādus trijniekus (a, b, c).