otrdiena, 16. jūlijs 2024

1. uzdevums. Atrast visus reālus skaitļus α ar īpašību, ka katram naturālam skaitlim n, vesels skaitlis

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

ir skaitļa n daudzkārtnis. (Ar $\lfloor z \rfloor$ apzīmē lielāko veselo skatli, kas ir mazāks vai vienāds ar z. Piemēram, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ un $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

2. uzdevums. Atrast visus naturālu skaitļu pārus (a, b), kuriem eksistē naturāli skaitļi g un N ar īpašību, ka

$$\gcd(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

izpildās visiem naturāliem skaitļiem $n \geqslant N$. (Ar $\gcd(x, y)$ apzīmē skaitļu x un y lielāko kopīgo dalītāju.)

3. uzdevums. Dots, ka $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ir bezgalīga naturālu skaitļu virkne un N ir naturāls skaitlis. Pieņemsim, ka katram naturālam skaitlim $n > N$, skaitlis a_n ir vienāds ar reižu skaitu, cik skaitlis a_{n-1} parādās starp skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Pierādīt, ka vismaz viena no virknēm $a_1, a_3, a_5, \ldots$ un $a_2, a_4, a_6, \ldots$ ir periodiska.

(Bezgalīga virkne $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ir *periodiska*, ja eksistē naturāli skaitļi p un M ar īpašību, ka $b_{m+p} = b_m$ visiem naturāliem $m \geqslant M$.)

Language: Latvian

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Par katru uzdevumu var nopelnīt līdz 7 punktiem.

trešdiena, 17. jūlijs 2024

4. uzdevums. Dots trijstūris ABC, kuram $AB < AC < BC$. Trijstūra ABC ievilktās riņķa līnijas centrs un ievilktā riņķa līnija ir attiecīgi I un ω. Punkts X atrodas uz taisnes BC un ir atšķirīgs no punkta C ar īpašību, ka taisne, kas iet caur punktu X, ir paralēla ar AC un pieskaras ω. Līdzīgi, punkts Y atrodas uz taisnes BC un ir atšķirīgs no punkta B ar īpašību, ka taisne, kas iet caur punktu Y, ir paralēla ar AB un pieskaras ω. Taisne AI krusto trijstūra ABC apvilkto riņķa līniju punktā $P \neq A$. Punkti K un L ir attiecīgi nogriežņu AC un AB viduspunkti.

Pierādīt, ka $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$.

5. uzdevums. Gliemezis Turbo spēlē spēli uz rūtiņu laukumu, kas sastāv no 2024 rindām un 2023 kolonnām. Zināms, ka 2022 rūtiņās ir paslēpti monstri. Sākotnēji Turbo nezina, kur atrodas jebkurš no monstriem, bet viņš zina, ka katrā rindā ir tieši viens monstrs, izņemot pirmo un pēdējo rindu, un to, ka katra kolonna satur ne vairāk kā vienu monstru.

Turbo izdara virkni ar mēģinājumiem, lai aizietu no pirmās uz pēdējo rindu. Katrā mēģinājumā viņš izvēlas rūtiņu pirmajā rindā, no kuras viņš sāks savu ceļojumu, un tad pārvietojas uz blakusesošu rūtiņu ar kopīgu malu. (Viņš drīkst atgriezties rūtiņās, kurās jau ir bijis.) Ja viņš nonāk rūtiņā, kurā ir monstrs, viņa mēģinājums beidzas un viņš tiek transportērts uz pirmo rindu, lai veiktu jaunu mēģinājumu. Monstri nemaina savu atrašanās vietu, un Turbo atceras, vai rūtiņā, kurā viņš ir bijis, ir monstrs vai nē. Ja viņš nonāk pēdējā rindā, viņa mēģinājumi un spēle beidzas.

Atrast mazāko naturālo skaitli n ar īpašību, ka Turbo eksistē stratēģija, kura nodrošina, ka viņš nonāk līdz pēdējai rindai n^{ja} mēģinājumā vai ātrāk, neatkarīgi no sākotnējā monstru izvietojuma.

6. uzdevums. Ar $\mathbb{Q}$ apzīmēsim racionālo skaitļu kopu. Funkcija $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ir *veldzējoša*, ja sekojoša īpašība izpildās: visiem $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{vai} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Pierādīt, ka eksistē naturāls skaitlis c ar īpašību, ka jebkurai veldzējošai funkcijai f ir ne vairāk kā c dažādu racionālu skaitļu, kuri ir izsakāmi formā $f(r) + f(-r)$ kaut kādam racionālam skaitlim r, un atrast mazāko iespējamo skaitļa c vērtību.

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Par katru uzdevumu var nopelnīt līdz 7 punktiem.