Operāciju pētīšanas pamati: Lineārā programmēšana

REINIS ISAKS

05.10.2024

Lineārā programmēšana

Lineārā programmēšana ir matemātikas nozare, kas nodarbojas ar vairāku mainīgu lineāru funkciju minimālo vai maksimālo vērtību atrašanas problēmām tādās kopās, kuras tiek aprakstītas ar lineārām vienādībām un/vai nevienādībām (lineāriem nosacījumiem).

Mērķa funkcija

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \to \max\ (min)$$

Mērķis ir atrast tādu mainīgo vektoru $(x_1 , x_2, \dots , x_n)$, lai funkcija sasniegtu savu minimumu vai maksimumu. Mērķa funkcijas f koeficienti $c_1 , c_2, \dots , c_n$ ir skaitļi!

Lineārās programmēšanas uzdevums (LPU): vispārīgā forma

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (min)$$

- n – mainīgo skaits;
- m – nosacījumu skaits;
- $x_1, \dots, x_n$ – mainīgie (nezināmie);
- $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}, b_1, \dots, b_m$ – nosacījuma koeficienti;
- $c_1, \dots, c_n$ – mērķa funkcijas koeficienti.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\ (i = 1, \dots, m_1) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\ (i = m_1 + 1, \dots, m_2) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i\ \ (i = m_2 + 1, \dots, m) \\ x_j \ge 0\ (j = 1, \dots, n_1) \\ x_j \le 0\ (j = n_1 + 1, \dots, n) \end{cases}$$

$$n, m \in \mathbb{N}$$
$$m_1, m_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$
$$m_1 \le m_2 \le m$$
$$n_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$
$$n_1 \le n$$
$$a_{ij}, b_i, c_j \in \mathbb{R}$$

LPU normālforma

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ (i = 1, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

Mērķa funkcijai f ir jāatrod maksimums tā, lai izpildās attēlā redzamie nosacījumi.

LPU kanoniskā forma

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_i x_j \to \max \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

Visas šīs formas (VF, NF, KF) savā starpā ir ekvivalentas, tas ir, var pāriet no vienas uz otru.

Tālāk apskatīsim piemērus, kur LPU tiek izmantots.

Ražošanas plānošanas uzdevums

Resursi	Resursu krājumi	Resursu patēriņš produkcijas vienības saražošanai	
		P_1	P_2
R_1	18	1	3
R_2	16	2	1
R_3	5	0	1
R_4	21	3	0
Peļņa, ko dod produkcijas vienība		2	3

Uzdevums:

Uzņēmumam, ražojot divu veidu produkciju P_1 un P_2, jāizmanto četri resursi R_1, R_2, R_3 un R_4. Jānosaka, cik daudz katra veida produkcijas ir jāražo, lai kopējā peļņa būtu vislielākā.

Ražošanas plānošanas uzdevums

x_1 - saražotās produkcijas P_1 daudzums;

x_2 - saražotās produkcijas P_2 daudzums;

f - peļņas funkcija.

Produkcija	P_1	P_2
Peļņa, ko dod produkcijas vienība	2	3

Ražošanas plānu apraksta vektors (x_1, x_2).

Mums ir jāatrod peļņas funkcijas maksimālo vērtību:

$$f = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow max$$

Ražošanas plānošanas uzdevums

Resursi	Resursu krājumi	Resursu patēriņš produkcijas vienības saražošanai	
		P_1	P_2
R_1	18	1	3
R_2	16	2	1
R_3	5	0	1
R_4	21	3	0
Peļņa, ko dod produkcijas vienība		2	3

$$f = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Vektoru (x_1, x_2), kas apmierina visus nosacījumus, sauc par ražošanas plānu. Par optimālo ražošanas plānu sauc plānu (x_1^*, x_2^*), kas maksimizē mērķa funkciju.

Uzdevums ir dots normālformā.

Mūsu gadījumā optimālais ražošanas plāns ir (6,4).

Ražošanas plānošanas uzdevums

Lai iegūtu atrisinājumu un tā vizualizāciju, varam izmantot programmu «Linear Optimization Solver».

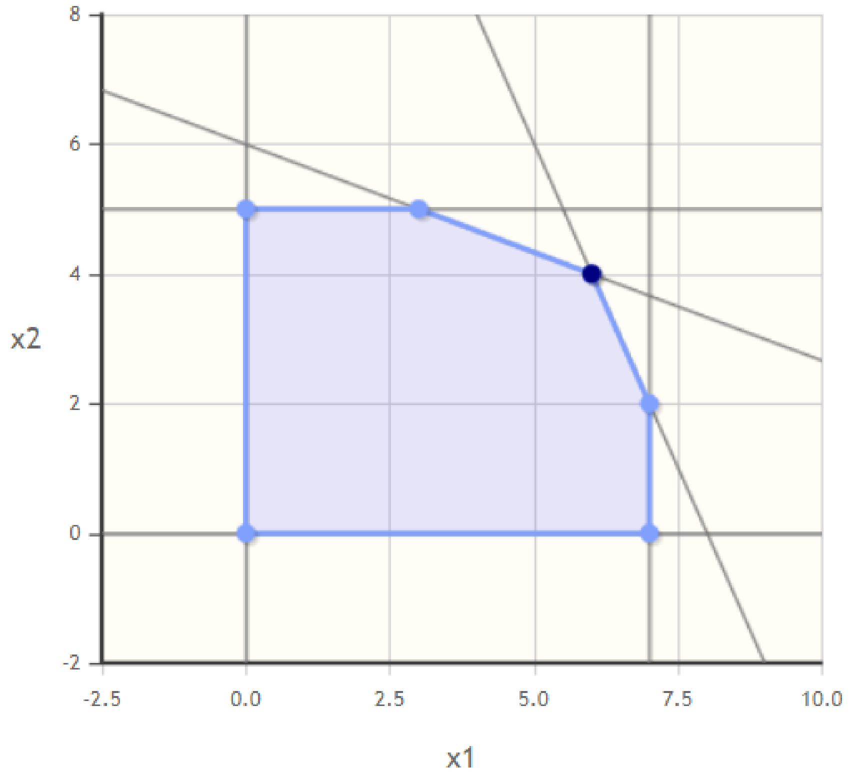
```
var x1 >= 0;
var x2 >= 0;

maximize z:     2*x1 + 3*x2;

subject to c11:   x1 +   3*x2 <=  18;
subject to c12: 2*x1 +   x2 <= 16;
subject to c13:          x2 <=  5;
subject to c14: 3*x1        <=  21;

end;

```



Ražošanas plānošanas uzdevums: pārskats

$$f = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Mūsu uzdevums

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_i x_j \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = 1, \dots, m) \\ x_j \ge 0 \ (j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

LPU NF

n – produkcijas veidu skaits;

m – resursu veidu skaits;

c_j – peļņa, ko dod j-tā produkcijas vienība;

a_{ij} – i-tā veida resursa patēriņš j-tā veida produkcijas vienības saražošanai ($i = 1,2, \dots, m$); ($j = 1,2, \dots, n$);

x_j – j-tā veida saražotās produkcijas daudzums ($j = 1,2, \dots, n$);

f – peļņas funkcija.

Mūsu gadījumā $n = 2$ un $m = 4$.

Transporta uzdevums

Piegādātāji (noliktavas) \ Patērētāji (veikali)	Kravas vienības transportēšanas izmaksas					Piegādātāju jauda (piedāvājums)
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
N_1	17	43	29	34	16	100
N_2	32	65	18	39	20	110
N_3	76	54	76	93	35	90
Patērētāju pieprasījums	50	70	80	60	40	

Trijiem piegādātājiem N_1, N_2 un N_3 jānogādā produkcija pieciem patērētājiem V_1, V_2, V_3, V_4 un V_5. Tabulā dots katra piegādātāja iespējamais produkcijas piegādes apjoms, patērētāju pieprasījumu apjomi un katra piegādātāja transportēšanas izmaksas, vedot vienu produkcijas vienību katram patērētājam.

Cik daudz produkcijas jāved no katra piegādātāja katram patērētājam, lai kopējās transportēšanas izmaksas būtu minimālas?

Transporta uzdevums

n – patērētāju (veikalu) skaits ($n = 5$);

m – piegādātāju (noliktavu) skaits ($m = 3$);

a_i – produkcijas daudzums i-tajā noliktavā (jauda) ($i = 1,2, \dots, m$);

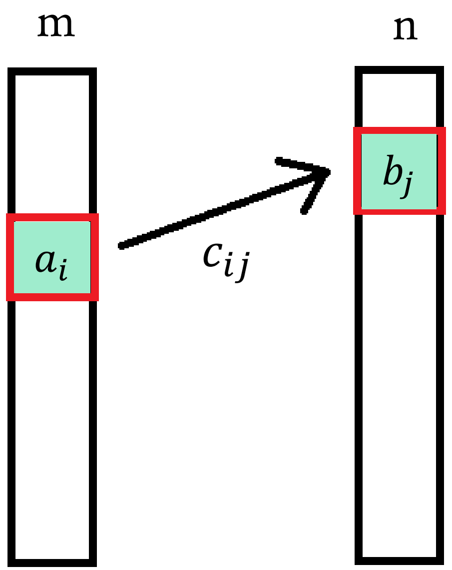
b_j – j-tā patērētāja (veikala) pieprasījums ($j = 1,2, \dots, n$);

c_{ij} – i-tā piegādātāja transportēšanas izmaksas, vedot vienu produkcijas vienību j-tam patērētājam ($i = 1,2, \dots, m$); ($j = 1,2, \dots, n$);

x_{ij} – produkcijas daudzums, kas no i-tās noliktavas jāpiegādā j-tam patērētājam

($i = 1,2, \dots, m$); ($j = 1,2, \dots, n$);

f – kopējo transportēšanas izmaksu funkcija.



Transporta uzdevums

Kopējām transportēšanas izmaksām jābūt minimālām. Mūsu mērķa funkcija ir:

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow min$$

Šī funkcija apraksta visas transportēšanas izmaksas (c) no visām noliktavām atkarībā no produkcijas daudzuma, kas jāpiegādā patērētājiem (x).

Transporta uzdevums

Piegādātāji (noliktavas) \ Patērētāji (veikali)	Kravas vienības transportēšanas izmaksas					Piegādātāju jauda (piedāvājums)
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
N_1	17	43	29	34	16	100
N_2	32	65	18	39	20	110
N_3	76	54	76	93	35	90
Patērētāju pieprasījums	50	70	80	60	40	

Mūsu gadījumā mērķa funkcija izteiksme ir šāda:

$$f = 17x_{11} + 43x_{12} + 29x_{13} + 34x_{14} + 16x_{15} + \cdots + 93x_{34} + 35x_{44} \rightarrow min$$

Transporta uzdevums: nosacījumi

Patērētāji (veikali) / Piegādātāji (noliktavas)	Kravas vienības transportēšanas izmaksas					Piegādātāju jauda (piedāvājums)
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
N_1	17	43	29	34	16	100
N_2	32	65	18	39	20	110
N_3	76	54	76	93	35	90
Patērētāju pieprasījums	50	70	80	60	40	

Katra piegādātāja nosūtītais daudzums visiem patērētājiem nedrīkst pārsniegt kopējo produkcijas daudzumu, kas atrodas pie piegādātāja (jaudu):

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 100 \; ; \ldots$$

Katram patērētājam jāsaņem viss tam nepieciešamais produkcijas daudzums:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 50 \; ; \ldots$$

Transporta uzdevums

$$f = 17x_{11} + 43x_{12} + 29x_{13} + 34x_{14} + 16x_{15} + \cdots + 93x_{34} + 35x_{44} \rightarrow min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 110 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 90 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 50 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 70 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 80 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 60 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 40 \\ x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2, \dots, m)(j = 1,2, \dots, n) \end{cases}$$

Transporta uzdevums

Varam iegūt atrisinājumu, izmantojot programmēšanu:

```
var x11 >= 0;
var x12 >= 0;
var x13 >= 0;
var x14 >= 0;
var x15 >= 0;

var x21 >= 0;
var x22 >= 0;
var x23 >= 0;
var x24 >= 0;
var x25 >= 0;

var x31 >= 0;
var x32 >= 0;
var x33 >= 0;
var x34 >= 0;
var x35 >= 0;

```

```
minimize z:     17*x11 + 43*x12 + 29*x13 + 34*x14 + 16*x15
+  32*x21 + 65*x22 + 18*x23 + 39*x24 + 20*x25
+  76*x31 + 54*x32 + 76*x33 + 93*x34 + 35*x35;

subject to c11:   x11 + x12 + x13 + x14 + x15 <=  100;
subject to c12:   x21 + x22 + x23 + x24 + x25 <=  110;
subject to c13:   x31 + x32 + x33 + x34 + x35 <=  90;
subject to c14:   x11 + x21 + x31 = 50;
subject to c15:   x12 + x22 + x32 = 70;
subject to c16:   x13 + x23 + x33 = 80;
subject to c17:   x14 + x24 + x34 = 60;
subject to c18:   x15 + x25 + x35 = 40;

end;
```

Transporta uzdevums

Apskatot sadaļu «Model overview», varam redzēt mērķa funkcijas vērtību:

Model overview

Label	Value
Problem type	Linear Optimization
Objective	Minimize z
Optimal objective value	9260
Solver status	Optimal
Total number of variables	15
Continuous variables	15
Number of constraints	9
Non-binary nonzero coefficients	45

Transporta uzdevums

Sadaļā «Variables», varam apskatīt nepieciešamo produkcijas daudzumu:

Variables

Variable	Type	Value	Value bounds	Status	Reduced obj coef	Obj coef tol interval
x11	Real	50	[0, Inf]	Basic	0	[-1, Inf]
x12	Real	0	[0, Inf]	At lower bound	9	
x13	Real	0	[0, Inf]	At lower bound	16	
x14	Real	50	[0, Inf]	Basic	0	[-15, Inf]
x15	Real	0	[0, Inf]	At lower bound	1	
x21	Real	0	[0, Inf]	At lower bound	10	
x22	Real	0	[0, Inf]	At lower bound	26	
x23	Real	80	[0, Inf]	Basic	0	
x24	Real	10	[0, Inf]	Basic	0	

Mūsu gadījumā atbilde ir vektors (50, 0, 0, 50, 0, 0, 0, 80, 10, 20, 0, 70, 0, 0, 20).

Paldies par uzmanību!