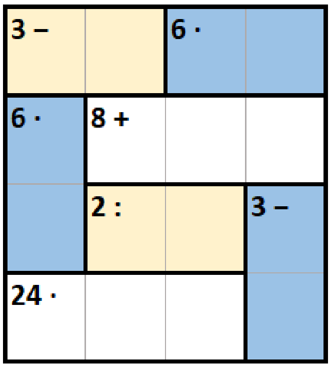
Profesora Cipariņa klubs
2024./2025. mācību gads
1. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. uzdevums

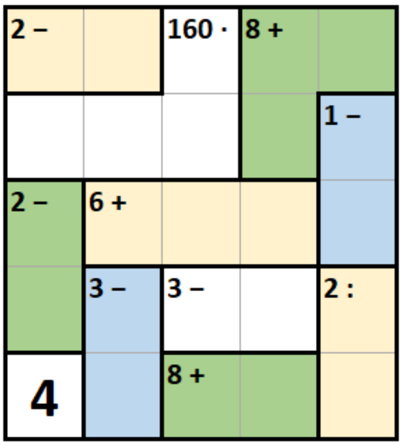
Režģa katrā rūtiņā ieraksti vienu skaitli **a)** no 1 līdz 4; **b)** no 1 līdz 5 tā, lai vienlaicīgi izpildītos abi nosacījumi:

- katrā rindā un katrā kolonnā ir ierakstīti visi skaitļi **a)** no 1 līdz 4; **b)** no 1 līdz 5;
- katrā ar tumšu līniju atdalītajā figūrā ir dots skaitlis un darbību zīme; ar šīs figūras rūtiņās ierakstītajiem skaitļiem, veicot doto darbību, jāiegūst dotais skaitlis. Piemēram, a) gadījumā augšējā stūra dzeltenajā figūrā "3 –" nozīmē, ka abu ierakstīto skaitļu starpība (no lielākā atņemot mazāko) ir 3.

a)

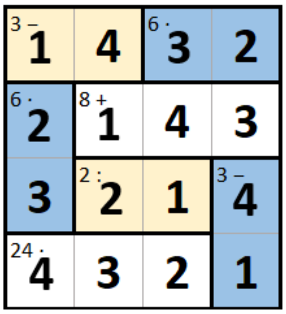


b)

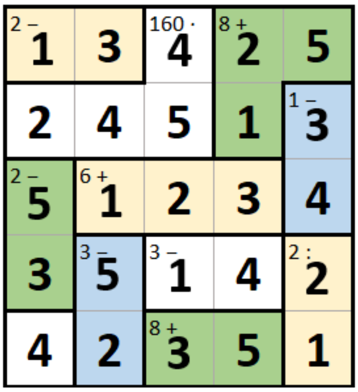


Atrisinājums. Skaitļus režģī iespējams uzrakstīt šādi:

a)

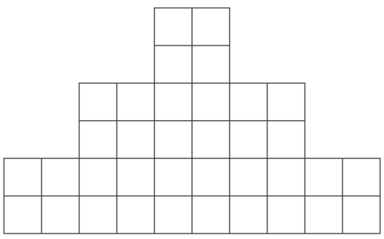


b)

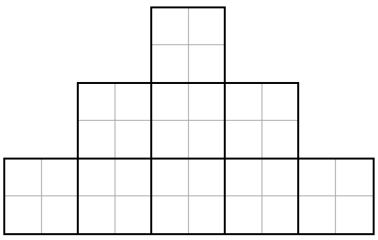


2. uzdevums

Profesors Cipariņš uzdeva skolēniem katrā no 36 mazajiem kvadrātiem (skat. 1. att.) ierakstīt vienu skaitli, pavisam izmantojot divdpadsmit skaitļus 1000, divdpadsmit skaitļus 500 un divdpadsmit skaitļus 12 tā, lai, izvēloties jebkuru kvadrātu ar izmēriem 2×2 rūtiņas, tajā ierakstīto skaitļu summa būtu mazāka nekā 2024. Vai Profesora Cipariņa uzdevumu ir iespējams izpildīt?



1. att.



2. att.

Atrisinājums. Nē, nav iespējams. Pamatosim, ka vismaz vienā kvadrātā ar izmēriem 2×2 rūtiņas ierakstīto skaitļu summa ir vismaz 2024. Sadalīsim 1. att. figūru kvadrātos ar izmēriem 2×2 rūtiņas (skat. 2. att.). Tā kā ir 9 šādi kvadrāti, kas nepārklājas, un tajos ir ierakstīti divdpadsmit skaitļi 1000, tad pēc Dirihlē principa kādā no šiem kvadrātiem būs vismaz divi skaitļi 1000. Pārējie divi ierakstītie skaitļi būs vismaz 12, tātad kvadrātā ierakstīto skaitļu summa būs vismaz $1000 + 1000 + 12 + 12 = 2024$.

3. uzdevums

Daumantam ir vairākas kartītes, uz katras no tām ir uzrakstīts cipars 5, bet Anetei ir vairākas kartītes, uz katras no tām ir uzrakstīts cipars 7. Kāds ir mazākais skaitlis, kuru Daumants un Anete, izmantojot vismaz vienu katra veida kartīti, kopīgi var izveidot no kartītēm, lai izveidotā skaitļa ciparu summa dalītos ar 35?

Atrisinājums. Mazākais skaitlis, kuru var izveidot, ir 555555577777. Pamatosim, ka mazāku skaitli izveidot nevar.

Lai ciparu summa dalītos ar $35 = 5 \cdot 7$, tai jādalās gan ar 5, gan ar 7. Lai cik skaitlī būtu uzrakstīti piecinieki, visas ciparu summas dalāmību ar 5 tas nemaina, tātad ir jāaplūko septītnieku skaits. Tā kā 5 un 7 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad mazākais skaitlis, kura pierakstā ir tikai cipari 7 un kura ciparu summa dalās ar 5, ir skaitlis 77777. Līdzīgi iegūst, ka mazākais skaitlis, kura pierakstā ir tikai cipars 5 un kura ciparu summa dalās ar 7, ir skaitlis 5555555. Tātad meklētais skaitlis ir 555555577777.

Piezīme. Uzdevumu var risināt sastādot vienādojumu $5 \cdot a + 7 \cdot b = 35 \cdot c$. Tā kā $5 \cdot a$ un $35 \cdot c$ dalās ar 5, tad arī $7 \cdot b$ jādalās ar 5. Tātad mazākā b vērtība ir 5, jo ir jābūt vismaz vienam septītniekam.

4. uzdevums

Pieci draugi – Aija (A), Bille (B), Centis (C), Dita (D) un Edžus (E) – piedalījās basketbola komandu sacensībās. Komandā var būt 2 vai 3 spēlētāji tā, lai vienlaicīgi izpildās abi nosacījumi:

1) viens un tas pats spēlētājs var būt vairākās komandās;
2) draugi, kuri ir 2 spēlētāju komandā, nedrīkst spēlēt kopā 3 spēlētāju komandā (piemēram, ja ir izveidotas komandas ar spēlētājiem Aija un Bille (AB), BCD un ACD, tad vairs nevar būt komandas ar spēlētājiem ABC, BD un citas).

a) Kādas komandas ar 3 spēlētajiem draugi var izveidot?

b) Draugi vēlas izveidot 8 komandas tā, lai būtu vismaz viena 2 spēlētāju komanda un vismaz viena 3 spēlētāju komanda. Parādi trīs veidus, kā var izveidot šādas 8 komandas tā, lai katrā no veidiem būtu cits 3 spēlētāju komandu skaits!

c) Kāds ir lielākais skaits komandu, ko draugi var izveidot tā, lai būtu tieši divas 3 spēlētāju komandas un vismaz viena 2 spēlētāju komanda?

Atrisinājums. a) Draugi var izveidot 10 dažādas komandas ar 3 spēlētājiem: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE un CDE. Vairāk par 10 komandām nevar izveidot, jo komandā var nebūt 10 dažādi draugu pāri: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE un DE.

Piezīme. Pamatot, ka var izveidot tieši 10 komandas, var arī, izmantojot reizināšanas likumu $\left(\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = 10\right)$ vai veicot sakārtotu pilno pārlasi.

b) Trīs veidos, kā izveidot 8 komandas atbilstoši nosacījumiem, var, piemēram, šādi:

1) viena 2 spēlētāju komanda AB un septiņas 3 spēlētāju komandas: ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE un CDE.
2) viena 3 spēlētāju komanda ABC un septiņas 2 spēlētāju komandas: AE, AD, BE, BD; CE, CD un DE.
3) četras 2 spēlētāju komandas: AB, AC, AD, AE un četras 3 spēlētāju komandas: BCD, BCE, BDE un CDE.

c) 1. atrisinājums. Lielākais skaits komandu ir 7. Pamatosim, ka vairāk komandu izveidot nevar. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka viena no 3 spēlētāju komandām ir ABC. Tā kā neviens no pāriem AB, AC un BC nevar būt atsevišķa 2 spēlētāju komanda, tad, lai izveidotu pēc iespējas vairāk komandu, viens no šiem pāriem ir otras 3 spēlētāju komandas daļa, piemēram, ABD. Tātad AD un BD arī nevar būt 2 spēlētāju komanda. Tādā gadījumā var izveidot piecas 2 spēlētāju komandas: AE, BE, CD, CE un DE.

c) 2. atrisinājums. Lielākais skaits komandu ir 7, piemēram, ABC, ABD, AE, BE, CD, CE un DE. Pamatosim, ka vairāk komandu izveidot nevar. Lai iegūtu lielāko komandu skaitu, 3 spēlētāju komandas jāveido no pēc iespējas mazāka draugu skaita. Tātad abās komandās jāatkārtojas diviem spēlētājiem, un trešajam spēlētājam jābūt citam draugam, piemēram, XYV un XYZ. Tādā gadījumā 2 spēlētāju komandā nevar būt 5 dažādi draugu pāri (XY, XV, YV, XZ, YZ). Kopā iespējami $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$ dažādi draugu pāri, jo katrs no 5 draugiem var būt pārī ar jebkuru no 4 atlikušajiem draugiem un pārī draugu secība nav svarīga. Tātad papildu divām 3 spēlētāju komandām var būt $10 - 5 = 5$ divu spēlētāju komandas un kopā var būt $2 + 5 = 7$ komandas.

5. uzdevums

Ozolu ģimenē rudens vakaros tēvs bieži izspēlē triku. Katrs no trīs bērniem stāv pie savas lādes, kuras ir zilā, rozā un zaļā krāsā. Uz katras no 100 kartītēm ir uzrakstīts viens skaitlis no 1 līdz 100 (skaitļi neatkārtojas). Tēvs visas kartītes ir ielicis lādēs tā, ka katrā lādē ir vismaz viena kartīte. Pēc tam tēvs aizver acis un ausis, lai neko neredzētu un nedzirdētu. Tieši divi bērni no savām lādēm izņem vienu kartīti un saskaita uz tām uzrakstīto skaitļu summu, kuru pasaka tēvam. Zinot tikai šo summu, tēvs nosaka, no kuras lādes netika izņemta kartīte. Parādi divus dažādus veidus, kā lādēs var salikt kartītes, lai tēvs varētu šo triku izpildīt!

Piezīme. Divi kartīšu sakārtošanas veidi lādēs tiek uzskatīti par vienādiem, ja vienas un tās pašas kartītes ir sakārtotas citu krāsu lādēs.

Atrisinājums. 1. veids: zilajā lādē kartīte ar skaitli 1, rozajā lādē kartītes ar skaitļiem no 2 līdz 99 un zaļajā lādē kartīte ar skaitli 100. Tādā gadījumā, izņemot kartītes no zilās un rozā lādes, summa ir no 3 līdz 100; izņemot kartītes no zilās un zaļās lādes, summa ir 101; izņemot kartītes no rozā un zaļās lādes, summa ir no 102 līdz 199. Tātad summas zināšana ļauj tēvam noteikt, no kuras lādes kartīte netika izņemta.

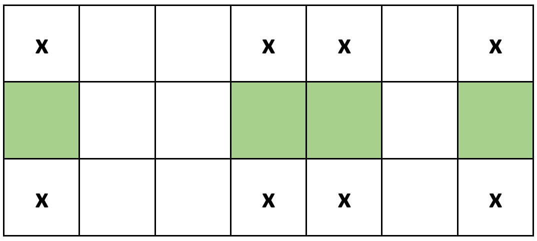
2. veids: zilajā lādē skaitļi 1; 4; 7; ...; 97; 100 (tas ir, skaitļi, kas dalot ar 3, dod atlikumu 1), rozajā lādē skaitļi 2; 5; 8; ...; 95; 98 (tas ir, skaitļi, kas dalot ar 3, dod atlikumu 2), zaļajā lādē skaitļi 3; 6; 9; ...; 96; 99 (tas ir, skaitļi, kas dalās ar 3). Izņemot kartītes no zilās un rozā lādes, summa dalās ar 3; izņemot kartītes no zilās un zaļās lādes, summa dod atlikumu 1, dalot ar 3; izņemot kartītes no rozā un zaļās lādes, summa dod atlikumu 2, dalot ar 3. Tātad summas zināšana ļauj tēvam noteikt, no kuras lādes kartīte netika izņemta.

Uzdevumi 8. un 9. klašu skolēniem

6. uzdevums

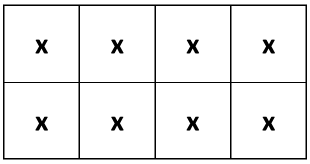
Kvadrātā ar izmēriem 7×7 rūtiņas katra rūtiņa ir nokrāsota vai nu zaļā, vai sarkanā krāsā. Pamato, ka dotajā kvadrātā vienmēr ir iespējams atrast taisnstūri, kura visas 4 stūra rūtiņas ir vienā krāsā!

Atrisinājums. Apskatīsim dotajā kvadrātā kādu taisnstūri ar izmēriem 3×7 rūtiņas. Pēc Dirihlē principa vidējā rinda noteikti saturēs vismaz 4 rūtiņas, kuras būs vienā krāsā. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka šīs 4 rūtiņas ir zaļā krāsā (skat. 3. att.).



3. att.

Rūtiņas, kas ir zem un virs mūsu zaļajām rūtiņām (3. att. apzīmētas ar "**x**"), arī būs nokrāsotas kādā krāsā. Ja augšējā vai apakšējā rinda saturēs divas zaļas rūtiņas vietās, kur tās apzīmētas ar "**x**", tad noteikti būsim ieguvuši taisnstūri, kura visas stūra rūtiņas ir zaļā krāsā. Pretējā gadījumā gan augšējā, gan apakšējā rinda tieši virs zaļajām rūtiņām saturēs vismaz trīs sarkanas rūtiņas. Pamatosim, ka no rūtiņām, kas ir apzīmētas ar "**x**", var izveidot taisnstūri, kura visas 4 stūra rūtiņas ir vienā krāsā. Tā kā mums interesē tikai stūra rūtiņas taisnstūrī, tad atliek pētīt taisnstūri ar izmēriem 2×4 rūtiņas, kura gan augšējā rinda, gan apakšējā rinda satur vismaz trīs sarkanas rūtiņas (skat. 4. att.).



4. att.

Lai kā arī izvietotu trīs sarkanās rūtiņas augšējā rindā, zem tām var būt ne vairāk kā viena zaļa rūtiņa. Tāpēc zem 3 sarkanajām rūtiņām būs vismaz divas sarkanas rūtiņas, kas arī tad veidos stūrus taisnstūrim, kura visa stūra rūtiņas ir sarkanas.

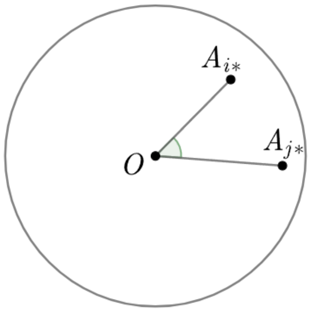
Tātad dotajā kvadrātā ar izmēriem 7×7 vienmēr varam atrast taisnstūri, kuram visas stūra rūtiņas ir vienā krāsā.

7. uzdevums

Riņķī, kura rādiuss ir 1, ir atzīmēti 8 dažādi punkti. Pamatot, ka starp šiem punktiem var atrast divus tādus, starp kuriem attālums ir mazāks nekā 1.

Atrisinājums. Tā kā ir doti 8 dažādi punkti, tad vismaz 7 no šiem punktiem atšķirsies no riņķa centra – punkta O. Apzīmēsim šos 7 dažādos punktus ar $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ un A_7. Gadījumā, ja kaut divi no šiem punktiem atrodas uz stara, kas iziet no punkta O, tad attālums starp tiem noteikti ir mazāks nekā 1, jo tie atradīsies uz nogriežņa, kas atbilst rādiusam. Pretējā gadījumā no šiem punktiem varam veidot leņķus ar virsotni punktā O, tas ir, varam apskatīt $\sphericalangle A_i O A_j$, kur A_i un A_j ir dažādi punkti. Starp šiem leņķiem noteikti būs mazākais leņķis, kas atbilst punktiem A_{i^*} un A_{j^*} (skat. 5. att., kurā punkti A_{i^*} un A_{j^*} var atrasties arī uz riņķa līnijas). Pie tam šim leņķim jābūt mazākam nekā 60°, jo zināms, ka ap centru O ir vismaz septiņi punkti, kuri veido 7 secīgus leņķus, tāpēc mazākais no tiem ($\sphericalangle A_{i^*} O A_{j^*}$) nevar pārsniegt $60°$, jo $360° : 7 < 60°$.

Apskatot trijstūri $A_{i^*} O A_{j^*}$ varam ievērot, ka nogriežņu OA_{i^*} un OA_{j^*} garums nepārsniedz 1, jo rādiuss ir garākais no nogriežņiem, kuriem viens galapunkts ir riņķa līnijas centrā, bet otrs galapunkts pieder riņķim. Tā kā $\sphericalangle A_{i^*} O A_{j^*} < 60°$, tad kāds no trijstūra $A_{i^*} O A_{j^*}$ leņķiem ir lielāks un pret to atrodas trijstūra garākā mala OA_{i^*} vai OA_{j^*}. Tādā gadījumā $A_{i^*} A_{j^*} < OA_{i^*} \leq 1$ vai $A_{i^*} A_{j^*} < OA_{j^*} \leq 1$ un attālums starp punktiem A_{i^*} un A_{j^*} ir mazāks nekā 1.



5. att.