Konkursa “Profesora Cipariņa klubs” nolikums

1. Profesora Cipariņa klubs (PCK) ir neklātienes matemātikas konkurss skolēniem līdz 9. klasei ieskaitot.
2. Iepriekšēja pieteikšanās konkursam nav nepieciešama.
3. Piedalīties drīkst sākot no jebkuras kārtas, kā arī var piedalīties tikai atsevišķās kārtās. Drīkst sūtīt arī tikai dažu uzdevumu risinājumus.
4. **Uzdevumu risinājumi jāraksta latviešu valodā.**
5. Uzdevumi, atrisinājumi un skolēnu rezultāti tiek publicēti LU A. Liepas NMS mājas lapā.
6. Mācību gada laikā tiek rīkotas 5 kārtas.
7. Katrā kārtā risināšanai tiek piedāvāti 7 uzdevumi. 1.-5. uzdevums paredzēts skolēniem līdz 7. klasei, bet 8.-9. klašu skolēniem paredzēts 1.-7. uzdevums.
8. Katrā kārtā tiek piedāvāts teorijas materiāls par kādu no matemātikas olimpiāžu tēmām un to var izmantot 2. uzdevuma un 6. uzdevuma risinājumos.
9. Laureāti tiek noteikti klašu grupā līdz 7. klasei (ieskaitot) un 8.-9. klašu grupā.
10. Katra uzdevuma risinājums tiek vērtēts ar 0-10 punktiem.
11. Ja no vienas skolas vai klases tiek saņemti vairāki gandrīz vienādi darbi, darbu labotājiem ir tiesības tos apvienot vienā komandas darbā vai arī vienādos risinājumus nevērtēt, tas ir, ielikt 0 punktus.
12. Konkursā var piedalīties gan individuāli risinātāji, gan komandas. Katrs skolēns drīkst piedalīties vai nu tikai individuāli, vai komandā.
13. Komandā nedrīkst būt vairāk kā 5 dalībnieki. Vienā komandā drīkst būt vai nu skolēni līdz 7. klasei (ieskaitot), vai arī 8.-9. klašu skolēni. Komanda sev izvēlas nosaukumu, kuru mācību gada laikā nemaina.
14. Katram uzdevumam drīkst iesūtīt ne vairāk kā vienu risinājuma variantu.
15. Lai par risinājumu saņemtu maksimālo punktu skaitu, jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī pilns uzdevuma risinājums.
16. Darbā pirmajā lappusē jānorāda
    1. individuāliem risinātājiem: savs vārds, uzvārds, skola, klase, matemātikas skolotājs (skolotājam norādiet gan vārdu, gan uzvārdu), telefons (ieteicams), kā arī konkursa nosaukums un konkursa kārta. (Šiem datiem NAV jāatvēl visa pirmā lappuse.) *Paraugs*.
    2. komandām: komandas nosaukums, katra dalībnieka vārds, uzvārds, skola, klase, matemātikas skolotājs (skolotājam norādiet gan vārdu, gan uzvārdu) un viens komandas kontakttelefons. (Šiem datiem NAV jāatvēl visa pirmā lappuse.) *Paraugs*.
17. Darbus jāiesniedz elektroniski sadaļā Darbu iesniegšana līdz norādītā termiņa beigām (pēc termiņa darbu iesniegšanas forma vairs nebūs pieejama).
18. Laureāti tiek noteikti gan katrā kārtā atsevišķi, gan kopvērtējumā pēc visās kārtās iegūto punktu kopsummas.
19. Kopvērtējuma laureāti maija beigās tiek aicināti uz Apbalvošanas pasākumu Rīgā.

Teorijas materiāls 2. un 6. uzdevumam
Dirihlē princips

Apskatīsim pavisam vienkāršu uzdevumu.
Pēterim ir 3 truši un 2 būri. Visi truši atrodas būros. Vai noteikti kādā no šiem būriem ir vismaz divi truši?
Uz šo jautājumu jūs visticamāk uzreiz atbildēsiet: "Nu, protams!" Ja šāda būra nebūtu, tad Pēterim katrā būrī būtu ne vairāk kā viens trusis. Tātad abos būros kopā būtu ne vairāk kā divi truši, bet Pēterim ir 3 truši. Līdz ar to noteikti ir tāds būris, kurā atrodas vismaz divi truši.
Ja Pēterim būtu 4 truši un 3 būri, vai arī tad noteikti būtu tāds būris, kurā atrodas vismaz divi truši? Bet, ja nu Pēterim būtu $(n+1)$ trusis un n būri?
Atbilde, spriežot līdzīgi, atkal būs apstiprinoša.

1. teorēma (Dirihlē princips). Ja vairāk nekā n objekti jāsadala n grupās, tad noteikti būs tāda grupa, kurā atradīsies vismaz 2 objekti.

Pierādījums. Pieņemsim pretējo, ka nevienā grupā nav vairāk kā viens objekts. Tā kā grupu pavisam ir n, tad kopā nav izvietoti vairāk kā n objekti, bet grupās ir jāsadala vairāk nekā n objekti. Tātad pieņēmums ir aplams un noteikti ir grupa, kurā ir vairāk nekā viens, tas ir, vismaz 2 objekti. ■
Bieži vien Dirihlē principu formulē šādā veidā:

„Ja vairāk nekā n truši jāizvieto n būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vairāk nekā viens (tātad vismaz 2) truši."

Lietojot Dirihlē principu uzdevumu risināšanā, galvenais ir izdomāt, kas katrā uzdevumā būs "būri" un kas – "truši". Uzdevumu risinājumā var gan atsaukties uz Dirihlē principu, gan arī atrisinājumu veidot, piemēram, līdzīgi kā pierādot 1. teorēmu. Abi šādi risinājumi ir pareizi (skat., piem., nākamo uzdevumu).

Uzdevumu piemēri

1. Pulciņā ir 13 skolēni. Pierādīt, ka no tiem var atrast tādus divus, kas dzimuši vienā un tajā pašā mēnesī!
   1. atrisinājums. Ja katrā mēnesī būtu dzimis ne vairāk kā viens skolēns, tad visos mēnešos kopā būtu dzimuši ne vairāk kā 12 skolēnu, bet pulciņā ir 13 skolēni. Tātad noteikti ir tāds mēnesis, kurā dzimuši vismaz divi no šī pulciņa skolēniem.
   2. atrisinājums. Šajā uzdevumā 13 skolēni ir jāsadala 12 grupās (mēnešos). Pēc Dirihlē principa noteikti būs mēnesis, kurā ir dzimuši vismaz divi skolēni, kas arī bija jāpierāda.

2. Doti naturāli skaitļi no 1 līdz 8. Pierādīt, ka, izvēloties jebkurus piecus no tiem, varēs atrast tādus divus, kuru summa ir 9.
   1. atrisinājums. Jebkurš no pieciem izvēlētajiem skaitļiem ietilpst vienā no šādām grupām (grupas veidotas no skaitļiem, kuru summa ir 9): „1 un 8"; „2 un 7"; „3 un 6"; „4 un 5". Ja katrā grupā būtu ne vairāk kā viens skaitlis, tad visās grupās kopā būtu ne vairāk kā četri skaitļi, bet ir jāizvēlas pieci skaitļi, tātad noteikti ir tāda grupa, kurā ir divi skaitļi, un šo skaitļu summa ir 9.
   2. atrisinājums. Jebkurš no pieciem izvēlētajiem skaitļiem ietilpst vienā no šādiem "būriem": „1 un 8"; „2 un 7"; „3 un 6"; „4 un 5". Tāpēc pēc Dirihlē principa vismaz vienā būrī nonāks vismaz 2 "truši" jeb 2 skaitļi, kuru summa ir deviņi.

3. Sniegbaltīte uzdāvināja katram no 7 rūķīšiem pa 5 konfektēm: „Vāverīti", „Margrietiņu" un „Lācīti", pie tam katrs rūķītis saņēma vismaz vienu katra veida konfekti. Pierādīt, ka ir divi tādi rūķīši, kam viņa uzdāvināja vienādus konfekšu komplektus!
   Atrisinājums. Ievērojam, ka skaitli 5 var izteikt kā trīs naturālu skaitļu summu tikai divos veidos: $3+1+1$ un $2+2+1$ (neņemot vērā saskaitāmo secību). Ņemot vērtā arī to, kura no konfektēm pirmajā gadījumā dāvināta 3 eksemplāros un kura no konfektēm otrajā gadījumā – vienā eksemplārā, iegūstam 6 dažādas iespējas:

"Vāverīte"	3	1	1	1	2	2
"Margrietiņa"	1	3	1	2	1	2
"Lācītis"	1	1	3	2	2	1

   Tā kā ir 7 rūķīši un 6 dažādas iespējas, kā uzdāvināt konfektes, tad pēc Dirihlē principa noteikti ir tādi divi rūķīši, kam Sniegbaltīte uzdāvināja vienādus konfekšu komplektus.

4. Pierādīt, ka starp jebkuriem sešiem naturāliem skaitļiem, kas nedalās ar 10, var atrast divus tādus, kuru summa vai starpība dalās ar 10.
Atrisinājums. Ja starp apskatāmajiem skaitļiem ir divi tādi, kam pēdējie cipari vienādi, tad to starpība dalās ar 10. Ja nav tādu divu skaitļu, kam pēdējie cipari ir vienādi, tad sadalām skaitļus 5 grupās atbilstoši to pēdējiem cipariem: "1 un 9"; "2 un 8"; "3 un 7"; "4 un 6"; "5". Tā kā ir 6 skaitļi un piecas grupas, tad divi skaitļi noteikti nonāk vienā grupā, to summa dalās ar 10.

5. Pierādīt, ka no jebkuriem astoņiem naturāliem skaitļiem var izvēlēties tādus divus, kuru starpība dalās ar 7.
Atrisinājums. Naturāls skaitlis, dalot ar 7, var dot septiņus dažādus atlikumus: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Dotos astoņus skaitļus uzskatīsim par „trušiem", savukārt vienā „būrī" ievietosim tos skaitļus, kas dod vienādus atlikumus, dalot ar 7, tātad ir 7 „būri". Pēc Dirihlē principa vismaz vienā „būrī" nonāks vismaz divi „truši" jeb vismaz divi skaitļi dod vienādus atlikumus, dalot ar 7. Šo skaitļu starpība dalās ar 7 (skat. nākamo teorēmu).

Teorēma par starpības dalīšanos. Dots, ka a, b un n – veseli skaitļi, turklāt $n > 0$. Starpība $(a - b)$ dalās ar n tad un tikai tad, ja a un b dod vienādus atlikumus, dalot ar n.

Apskatīsim vēl vienu uzdevumu par Pēteri un viņa trušiem.
Pēterim ir 5 truši un 2 būri. Visi truši atrodas būros. Vai noteikti kādā no šiem būriem ir vismaz 3 truši?
Risināsim šo uzdevumu līdzīgi, kā iepriekšējo uzdevumu par trušiem. Ja šāda būra nebūtu, tad Pēterim katrā būrī būtu ne vairāk kā 2 truši. Tātad abos būros kopā būtu ne vairāk kā 4 truši, bet Pēterim ir 5 truši. Līdz ar to noteikti ir tāds būris, kurā atrodas vismaz 3 truši.
Un, ja Pēterim būtu 10 truši un 3 būri? Vai mēs varētu apgalvot, ka noteikti ir tāds būris, kurā ir vismaz 4 truši?
Atbilde atkal ir apstiprinoša. Ja katrā būrī būtu ne vairāk kā 3 truši, tad visos būros kopā būtu izvietoti ne vairāk kā 9 truši, bet Pēterim ir 10 truši. Tātad noteikti ir tāds būris, kurā atrodas vismaz 4 truši.
Šajos piemēros varēja lietot tālāk doto Dirihlē principa vispārinājumu.

2. teorēma (Dirihlē princips). Ja vairāk nekā $m \cdot n$ objekti jāsadala n grupās, tad noteikti būs grupa, kurā atradīsies vismaz $(m + 1)$ objekts.

Pierādījums. Pieņemsim pretējo, ka nevienā grupā nav vairāk kā m objekti. Tā kā grupu pavisam ir n, tad kopā nav izvietoti vairāk kā $m \cdot n$ objekti, bet grupās ir jāsadala vairāk nekā $m \cdot n$ objekti. Tātad pieņēmums ir aplams un noteikti ir grupa, kurā ir vairāk nekā m, tas ir, vismaz $(m + 1)$ objekts. ■

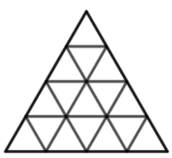
Uzdevumu piemēri

6. Profesora Cipariņa olimpiādē bija 3 uzdevumi. Tajā piedalījās 100 skolēni. Pierādīt, ka atradīsies vismaz 13 skolēni, kas izrēķināja vienus un tos pašus uzdevumus (vai arī neizrēķināja nevienu uzdevumu)! Katrs skolēns katru uzdevumu vai nu izrēķināja, vai neizrēķināja, daļēji risinājumi netika iesniegti.
Atrisinājums. No trīs uzdevumiem var izveidot 8 dažādus atrisināto uzdevumu „komplektus" (tajā skaitā, neviens atrisināts uzdevums), tabulā ar "+" atzīmēti tie uzdevumi, kuri ir izrēķināti.

Komplekta nr.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
1. uzdevums		+			+		+	+
2. uzdevums			+		+	+		+
3. uzdevums				+		+	+	+

Ja katru „komplektu" būtu atrisinājuši ne vairāk kā 12 skolēni, tad skolēnu kopējais skaits būtu ne vairāk kā $12 \cdot 8 = 96 < 100$. Tātad ir vismaz 13 skolēni, kas atrisinājuši vienus un tos pašus uzdevumus.

7. Katrā no 16 mazajiem trijstūriem (skat. 1. att.) ir ierakstīts viens skaitlis, pavisam ierakstīti septiņi trijnieki un deviņi piecinieki. Pierādīt, ka var izvēlēties tādu trijstūri, kā parādīts 2. att., kurā ierakstīto skaitļu summa ir vismaz 18.


1. att.


2. att.


3. att.

Atrisinājums. Sadalīsim sākotnējo trijstūri četros trijstūros ar malas garumu 2 (skat. 3. att.). Tā kā ir četri šādi trijstūri (kas nepārklājas), un tajos ierakstīti 9 piecinieki, tad kādā no šiem trijstūriem būs vismaz trīs piecinieki, tāpēc tajā ierakstīto skaitļu summa būs vismaz $5 + 5 + 5 + 3 = 18$, kas bija jāpierāda.

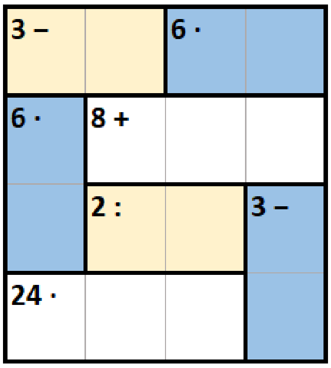
Profesora Cipariņa klubs
2024./2025. mācību gads
1. kārtas uzdevumi

1. uzdevums

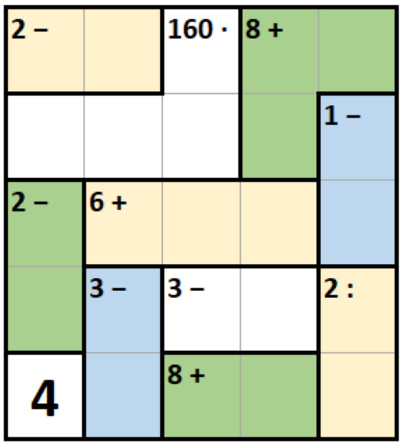
Režģa katrā rūtiņā ieraksti vienu ciparu **a)** no 1 līdz 4; **b)** no 1 līdz 5 tā, lai vienlaicīgi izpildītos abi nosacījumi:

- katrā rindā un katrā kolonnā ir ierakstīti visi skaitļi **a)** no 1 līdz 4; **b)** no 1 līdz 5;
- katrā ar tumšu līniju atdalītajā figūrā ir dots skaitlis un darbību zīme; ar šīs figūras rūtiņās ierakstītajiem skaitļiem, veicot doto darbību, jāiegūst dotais skaitlis. Piemēram, a) gadījumā augšējā stūra dzeltenajā figūrā “3 –“ nozīmē, ka abu ierakstīto skaitļu starpība (no lielākā atņemot mazāko) ir 3.

a)

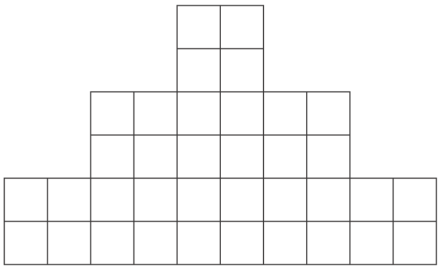


b)



2. uzdevums

Profesors Cipariņš uzdeva skolēniem katrā no 36 mazajiem kvadrātiem (skat. 4. att.) ierakstīt vienu skaitli, pavisam izmantojot divdpadsmit skaitļus 1000, divdpadsmit skaitļus 500 un divdpadsmit skaitļus 12 tā, lai, izvēloties jebkuru kvadrātu ar izmēriem 2×2 rūtiņas, tajā ierakstīto skaitļu summa būtu mazāka nekā 2024. Vai Profesora Cipariņa uzdevumu ir iespējams izpildīt?



4. att.

3. uzdevums

Daumantam ir vairākas kartītes, uz katras no tām ir uzrakstīts cipars 5, bet Anetei ir vairākas kartītes, uz katras no tām ir uzrakstīts cipars 7. Kāds ir mazākais skaitlis, kuru Daumants un Anete, izmantojot vismaz vienu katra veida kartīti, kopīgi var izveidot no kartītēm, lai izveidotā skaitļa ciparu summa dalītos ar 35?

4. uzdevums

Pieci draugi – Aija (A), Bille (B), Centis (C), Dita (D) un Edžus (E) – piedalījās basketbola komandu sacensībās. Komandā var būt 2 vai 3 spēlētāji tā, lai vienlaicīgi izpildās abi nosacījumi:

1) viens un tas pats spēlētājs var būt vairākās komandās;
2) draugi, kuri ir 2 spēlētāju komandā, nedrīkst spēlēt kopā 3 spēlētāju komandā (piemēram, ja ir izveidotas komandas ar spēlētājiem Aija un Bille (AB), BCD un ACD, tad vairs nevar būt komandas ar spēlētājiem ABC, BD un citas).

a) Kādas komandas ar 3 spēlētajiem draugi var izveidot?

b) Draugi vēlas izveidot 8 komandas tā, lai būtu vismaz viena 2 spēlētāju komanda un vismaz viena 3 spēlētāju komanda. Parādi trīs veidus, kā var izveidot šādas 8 komandas tā, lai katrā no veidiem būtu cits 3 spēlētāju komandu skaits!

c) Kāds ir lielākais skaits komandu, ko draugi var izveidot tā, lai būtu tieši divas 3 spēlētāju komandas un vismaz viena 2 spēlētāju komanda?

5. uzdevums

Ozolu ģimenē rudens vakaros tēvs bieži izspēlē triku. Katrs no trīs bērniem stāv pie savas lādes, kuras ir zilā, rozā un zaļā krāsā. Uz katras no 100 kartītēm ir uzrakstīts viens skaitlis no 1 līdz 100 (skaitļi neatkārtojas). Tēvs visas kartītes ir ielicis lādēs tā, ka katrā lādē ir vismaz viena kartīte. Pēc tam tēvs aizver acis un ausis, lai neko neredzētu un nedzirdētu. Tieši divi bērni no savām lādēm izņem vienu kartīti un saskaita uz tām uzrakstīto skaitļu summu, kuru pasaka tēvam. Zinot tikai šo summu, tēvs nosaka, no kuras lādes netika izņemta kartīte. Parādi divus dažādus veidus, kā lādēs var salikt kartītes, lai tēvs varētu šo triku izpildīt!

Piezīme. Divi kartīšu sakārtošanas veidi lādēs tiek uzskatīti par vienādiem, ja vienas un tās pašas kartītes ir sakārtotas citu krāsu lādēs.

Uzdevumi 8. un 9. klašu skolēniem

6. uzdevums

Kvadrātā ar izmēriem 7×7 rūtiņas katra rūtiņa ir nokrāsota vai nu zaļā, vai sarkanā krāsā. Pamato, ka dotajā kvadrātā vienmēr ir iespējams atrast taisnstūri, kura visas 4 stūra rūtiņas ir vienā krāsā!

7. uzdevums

Riņķī, kura rādiuss ir 1, ir atzīmēti 8 dažādi punkti. Pamatot, ka starp šiem punktiem var atrast divus tādus, starp kuriem attālums ir mazāks nekā 1.