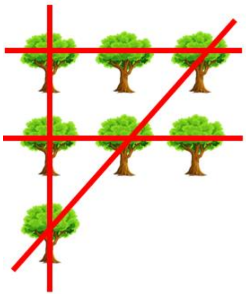
Profesora Cipariņa klubs
2024./2025. mācību gads
2. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. uzdevums

a) Vai deviņus kokus var iestādīt tā, lai tieši trīs koki atrastos uz astoņām taisnēm?

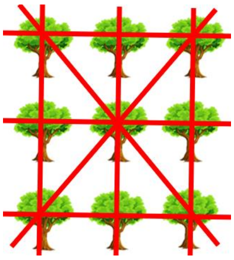
b) Vai septiņus kokus var iestādīt tā, lai tieši trīs koki atrastos uz sešām taisnēm?

Piezīme. Piemēram, 1. att., septiņi koki iestādīti tā, ka tieši trīs koki atrodas uz četrām taisnēm.

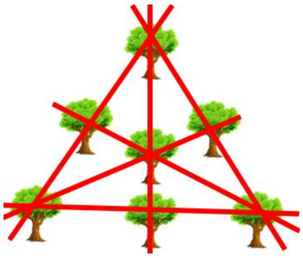


1. att.

Atrisinājums. a) Jā. var, piemēram, skat. 2. att. **b)** Jā, var, piemēram, skat. 3. att.



2. att.



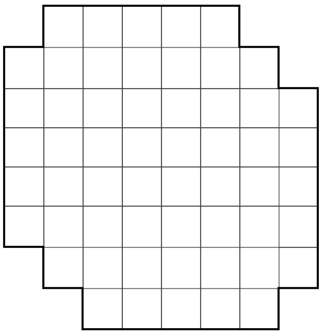
3. att.

2. uzdevums

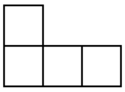
a) Vai 4. att. figūru var pārklāt, izmantojot 5. att. un 6. att. figūras?

b) Vai kvadrātu ar izmēriem 6×6 rūtiņas var pārklāt, izmantojot vienu 5. att. un astoņas 6. att. figūras?

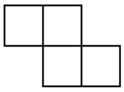
Piezīme. Figūras nedrīkst iziet ārpus 4. att. figūras un kvadrāta, figūras nedrīkst pārklāties, figūras drīkst pagriezt un apmest otrādi.



4. att.

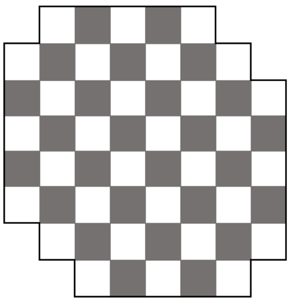


5. att.

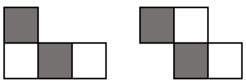


6. att.

Atrisinājums. a) Nē, nevar. Iekrāsojot 4. att. figūru šaha galdiņa veidā, iegūstam 30 baltas un 26 pelēkas rūtiņas (skat. 7. att.). Lai kā novietotu 5. att. un 6. att. figūras, tās noklās tieši 2 baltas un 2 pelēkas rūtiņas (skat. 8. att.), tātad vienādu skaitu pelēko un balto rūtiņu. Tā kā 7. att. figūrā pelēko un balto rūtiņu skaits atšķiras, tad prasīto nevar izdarīt.

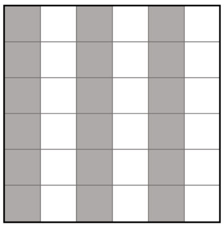


7. att.

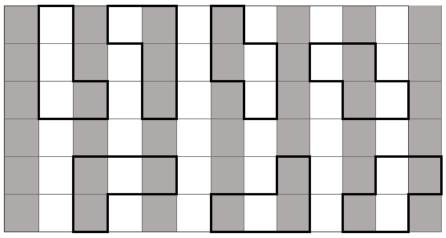


8. att.

b) Nē, nevar. Iekrāsojot doto kvadrātu figūru joslās, iegūstam 18 baltas un 18 pelēkas rūtiņas (skat. 9. att.). Lai kā novietotu vienu 5. att. figūru, tā vienmēr noklās 1 baltu un 3 pelēkas rūtiņas vai otrādi – 1 pelēku un 3 baltas rūtiņas (skat. 10. att.), tātad nepāra skaitu katras krāsas rūtiņu. Lai kā novietotu 6. att. figūru , tā vienmēr noklās 2 baltas un 2 pelēkas rūtiņas (skat. 10. att.), tātad astoņas tādas figūras noklās pāra skaitu katras krāsas rūtiņu. Tādā gadījumā kopā viena 5. att. un astoņas 6. att. figūras noklās nepāra skaita katras krāsas rūtiņu, tātad prasīto nevar izdarīt, jo jānoklāj 18 baltas un 18 pelēkas rūtiņas.



9. att.

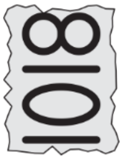


10. att.

3. uzdevums

Olimpijā telefona numura pirmie divi cipari ir 81 un pavisam telefona numurs satur 6 ciparus. Alfons nevar atcerēties sava drauga Teodora telefona numuru. Viņš somā atrada noplēstu papīra gabaliņu, uz kura ir daļa no Teodora telefona numura (skat. 11. att.). Kāds mazākais zvanu skaits uz dažādiem numuriem jāveic, lai noteikti noskaidrotu Teodora numuru?

Piezīme. Uz katru veikto zvanu tiek atbildēts un pateikts, vai ir sazvanīts Teodors.



11. att.

Atrisinājums. Uz papīra gabala var būt uzrakstīts 8101 vai 1018. Aplūkosim visas iespējas, kādas telefona numura daļas Teodors varēja atrast, ņemot vērā, ka visi telefona numuri sākas ar 81.

Numura daļas novietojums	*Iespējamo numuru skaits*
8101??	?? vietā var būt jebkura kombinācija no 00; 01; 02; …; 99, tātad 100 iespējami numuri.
?**8101**?	Neder, jo numuram jāsākas ar 81.
81**8101**	1 iespējams numurs
1018??	Neder, jo numuram jāsākas ar 81.
8**1018**?	Pēdējais cipars var būt jebkurš no cipariem, bet visas šīs iespējas ir ieskaitītas pie 1. gadījuma (**8101**??).
81**1018**	1 iespējams numurs

Tātad ir iespējami $100+1+1=102$ dažādi telefona numuri, kas atbilst nosacījumiem. Tomēr Alfonam pietiek veikt 101 zvanu, lai noteikti noskaidrotu Teodora numuru, jo pēdējais nepārbaudītais telefona numurs noteikti ir Alfona, ja ir pārbaudīts 101 numurs, no kuriem neviens nav Alfona telefona numurs.

4. uzdevums

Rudens konkursam nepieciešams sagatavot 40 uzdevumus. To apņēmās izdarīt 30 skolēni no piecām dažādām klasēm. Skolēni, kas mācās vienā klasē, izdomāja vienādu skaitu uzdevumu. Jebkuri divi skolēni no dažādām klasēm izdomāja atšķirīgu skaitu uzdevumu. Cik skolēnu izdomāja vienu uzdevumu?

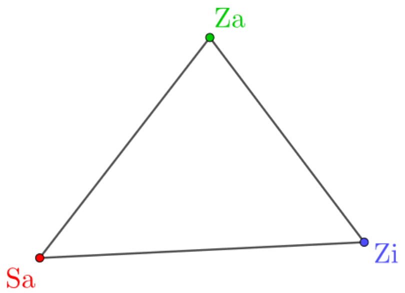
Atrisinājums. Pamatosim, ka vienu uzdevumu izdomāja tieši 26 skolēni. Tā kā katri divi skolēni no dažādām klasēm izveidoja atšķirīgu skaitu uzdevumu, tad pieci skolēni (katrs no savas klases) ir izveidojuši vismaz $1+2+3+4+5=15$ uzdevumus. Tāda gadījumā atlikušie 25 skolēni ir izveidojuši ne vairāk kā $40-15=25$ uzdevumus, tātad katrs no tiem izveidoja tieši vienu uzdevumu. Iegūstam, ka 26 skolēni katrs izdomāja pa vienam uzdevumam un no četrām klasēm katrs skolēns izdomāja attiecīgi 2; 3; 4 un 5 uzdevumus.

5. uzdevums
Naturālu skaitli var uzrakstīt kā 18 tā dalītāju (ne obligāti dažādu) summu un arī kā 19 tā dalītāju (ne obligāti dažādu) summu. Pierādīt, ka šo skaitli var uzrakstīt kā 20 tā dalītāju (ne obligāti dažādu) summu.
Atrisinājums. Vispirms pamatosim, ka dotais skaitlis ir pāra skaitlis. Pieņemsim pretējo, ka dotais skaitlis ir nepāra. Tādā gadījumā visi tā dalītāji ir nepāra skaitļi un 18 nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis. Iegūta pretruna, tātad pieņēmums ir aplams un dotais skaitlis ir pāra skaitlis.
Tā kā pāra skaitli var izteikt kā 19 tā dalītāju summu, tad vismaz viens no šiem dalītājiem ir pāra skaitlis, jo 19 nepāra skaitļu summa ir nepāra skaitlis. Šo dalītāju, kas ir pāra skaitlis, var izteikt kā divu vienādu skaitļu summu $a+a$, tātad doto skaitli var izteikt kā 20 tā dalītāju summu, saglabājot visus iepriekšējos 19 dalītājus, bet vienu no tiem sadalot divos vienādos dalītājos a.

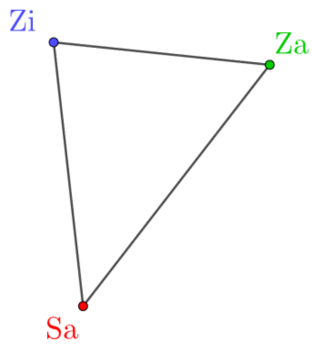
Uzdevumi 8. un 9. klašu skolēniem

6. uzdevums
Katrs punkts plaknē ir nokrāsots vai nu zils, vai sarkans. Pamatot, ka var atrast nogriezni ar garumu 2024 un nogriezni ar garumu 2025, kuriem visi galapunkti ir vienā un tajā pašā krāsā!
Atrisinājums. Pierādīsim prasīto no pretējā. Pieņemsim, ka nevar atrast šādus punktus, lai tie visi būtu vienā krāsā. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka starp sarkanajiem punktiem nevar izveidot nogriezni ar garumu 2024, un ka starp zilajiem punktiem nevar izveidot nogriezni ar garumu 2025. Plaknē atzīmēsim kādu zilu punktu C un izveidosim vienādsānu trīsstūri ABC ar sāniem ar garumu $AC=BC=2025$ un pamatu ar garumu $AB=2024$. Tā kā C ir zilā krāsā, tad pēc pieņēmuma gan A, gan B nevar būt zilā krāsā, jo tad izveidotos nogrieznis ar garumu 2025 un ziliem galapunktiem. Tātad A un B ir sarkanā krāsā, bet tas tad nozīmē, ka starp sarkanajiem punktiem esam novilkuši nogriezni ar garumu 2024. Iegūstam pretrunu, tātad pieņēmums, ka nevar atrast punktus, starp kuriem var izveidot nogriežņus ar garumu 2024 un 2025, un lai galapunkti abiem šiem nogriežņiem būtu vienā krāsā, ir aplams.

7. uzdevums
Bezgalīgā futbola laukumā novietota sarkana, zaļa un zila futbolbumba tā, lai tās neatrastos uz vienas taisnes. Francis izvēlas jebkuru no bumbām un sper to starp atlikušajām divām, lai tā krustotu nogriezni, kura galapunkti ir atlikušās divas bumbas. Vai Francis var panākt, ka pēc 2025 šādiem spērieniem bumbas nonāk to sākotnējās pozīcijās?
Atrisinājums. Pamatosim, ka Francis nevar šo panākt. Tā kā futbolbumbas neatrodas uz vienas taisnes, tad no tām var izveidot trīsstūri (piemēram, skat. 12. att.).



12. att.



13. att.

Ievērosim, ka pulksteņrādītāja virzienā, sākot ar sarkano bumbu, 12. att. redzamajā trīsstūrī virsotņu secība ir Sa, Za, Zi. Lai kuru bumbu Francis neizvēlētos spert, piemēram, zilo, mainīsies secība virsotnēm jaunizveidotajā trīsstūrī (skat. 13. att.). Atkal skatoties uz bumbām, sākot ar sarkano un ejot pulksteņrādītāja virzienā, iegūstam Sa, Zi, Za.
Katrs spēriens nomainīs secību virsotnēm šajā trīsstūrī uz pretējo secību (skatoties pretēji pulksteņrādītāja virzienam). Pie tam ir iespējamas tikai divas secības, ja skatāmies no sarkanās bumbas, tas ir, Sa, Za, Zi un Sa, Zi, Za. Tātad, lai Francis pēc 2025 spērieniem panāktu to, ka bumbas nonāk sākotnējās pozīcijās, tad būtu nepieciešams, lai bumbu secība būtu tāda pati kā sākumā, tātad nepieciešams pāra skaits spērienu. Tātad pēc 2025 spērieniem Francis nevar panākt uzdevumā prasīto.