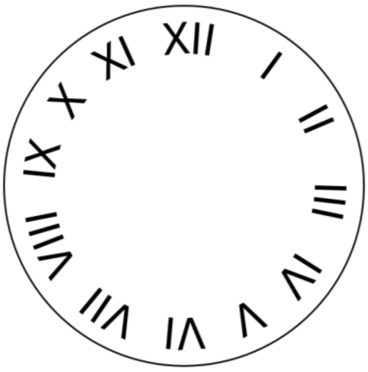
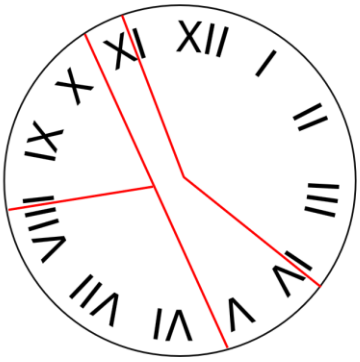
Profesora Cipariņa klubs
2024./2025. mācību gads
3. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. uzdevums
Parādi, kā 1. att. doto pulksteņa ciparnīcu var sadalīt četrās daļās tā, lai katrā daļā ierakstīto romiešu skaitļu summa būtu 20.



1. att.

Atrisinājums. Skatīt 2. att., kur katrā daļā ierakstīto skaitļu summa ir $1+12+1+2+3+1=5+5+10=$ $=6+7+7=1+9+10=20$.



2. att.

2. uzdevums
Rūķim Konfektim dotas 7 pēc ārējā izskata vienādas konfektes. No tām 5 konfektes ir ar vienādu masu, bet divām konfektēm masa ir savstarpēji vienāda, bet mazāka nekā pārējām piecām. Kā viņš ar trim svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem var atrast abas vieglākās konfektes?
Atrisinājums. Katrā svaru kausā ieliekam 3 konfektes. Iespējami divi gadījumi.
1. Ja pirmajā svēršanā svari nav līdzsvarā, tad "vieglākajā" kausā ir viena vai abas vieglākās konfektes. Apzīmēsim "vieglākā" kausa konfektes ar A, B un C, bet 7. konfekti, kura netika ielikta kausos 1. svēršanā, apzīmēsim ar D. Otrajā svēršanā salīdzina divas konfektes no "vieglākā" kausa, piemēram, A un B (ja izvēlas citas konfektes, visi tālākie spriedumi ir tādi paši). Iespējami divi gadījumi.
    - Ja konfektēm A un B ir vienādas masas, tad tās abas ir vai nu vieglākās, vai smagākās konfektes. Trešajā svēršanā salīdzina vienu konfekti (A vai B) ar konfekti C. Ja A vai B ir vieglāka nekā C, tad konfektes A un B ir meklētās vieglākās konfektes. Ja A vai B ir smagāka nekā C, tad C un D ir meklētās vieglākās konfektes.
    - Ja viena no konfektēm ir vieglāka (piemēram, A), tad tā ir viena no meklētajām un to trešajā svēršanā salīdzina ar konfekti C. Ja abas konfektes ir ar vienādu masu, tad A un C ir meklētās vieglākās konfektes. Ja konfekte C ir smagāka, tad meklētās vieglākās konfektes ir A un D.
2. Ja pirmajā svēršanā abi kausi ir līdzsvarā, tad katrā no tiem atrodas viena no abām vieglākajām konfektēm. Otrajā svēršanā salīdzina divas konfektes no viena kausa. Iespējami divi gadījumi:
    - ja to masa ir vienāda, tad trešā konfekte ir vieglākā;
    - ja viena no konfektēm ir vieglāka, tad tā ir viena no meklētajām vieglākajām konfektēm.

    Līdzīgi ar trešo svēršanu atrod otru vieglāko konfekti.

3. uzdevums

Doti trīs dažādi skaitļi P; C un K. Zināms, ka katru divu šo skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir pirmskaitlis un **a)** šie pirmskaitļi var būt arī vienādi; **b)** šie pirmskaitļi ir dažādi. Kāda ir mazākā iespējamā summas $P+C+K$ vērtība?

Atrisinājums. a) Mazākās iespējamā summas vērtība ir 12. Pamatosim, ka mazāka summa nav iespējama. Lai tā būtu mazākā iespējamā, tad arī šo skaitļu lielākajiem kopīgajiem dalītājiem jābūt pēc iespējas mazākiem. Mazākais pirmskaitlis ir 2 un mazākie skaitļi, kuru lielākais kopīgais dalītājs ir 2, ir $2\cdot 1=2$; $2\cdot 2=4$ un $2\cdot 3=6$. Tādā gadījumā skaitļi P; C un K kaut kādā secībā ir 2; 4 un 6 un $P+C+K=2+4+6=12$.

b) Mazākā iespējamā summas vērtība ir 31. Pamatosim, ka mazāka summa nav iespējama. Lai summa būtu mazākā iespējamā, tad skaitļu lielākajiem kopīgajiem dalītājiem jābūt pēc iespējas mazākiem. Trīs mazākie pirmskaitļi ir 2; 3 un 5. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka

- $LKD(P;C)=2$, tātad P un C dalās ar 2;
- $LKD(P;K)=3$, tātad P un K dalās ar 3;
- $LKD(C;K)=5$, tātad C un K dalās ar 5.

Tātad mazākie derīgie skaitļi ir skaitļi $P=2\cdot 3=6$; $C=2\cdot 5=10$ un $K=3\cdot 5=15$. Līdz ar to $P+C+K=$ $=6+10+15=31$.

4. uzdevums

Profesors Cipariņš katram skolēnam iedeva divas baltas papīra monētas un uzdeva uz katras monētas katras puses uzrakstīt vienu atšķirīgu skaitli no 1 līdz 9 (kopā četrus dažādus skaitļus). Tālāk skolēniem bija jāmet abas papīra monētas vairākas reizes un katru reizi jāpieraksta abu uzmesto skaitļu summu.

a) Auseklis ieguva tikai summas 7, 8, 9 un 10. Uzraksti visus četrus veidus, kādus skaitļus viņš varēja uzrakstīt uz monētām!

b) Saulcerīte uz vienas monētas abām pusēm uzrakstīja skaitļus 4 un 5. Vienīgās summas, kuras viņa ieguva, bija trīs pēc kārtas esoši skaitļi. Kādus skaitļus Saulcerīte varēja uzrakstīt uz otras monētas katras puses?

c) Rota ieguva tikai tādas summas, kuras ir četri pēc kārtas esoši skaitļi. Pierādi, ka vai nu viens, vai trīs no viņas uzrakstītajiem skaitļiem bija pāra skaitļi.

Atrisinājums. Ja uz vienas monētas katras puses ir uzrakstīti skaitļi a un b, un uz otras monētas katras puses ir uzrakstīti skaitļi c un d, tad to pierakstīsim šādi: uz abām monētām uzrakstīti skaitļi a/b un c/d.

a) Auseklis uz monētām varēja uzrakstīt skaitļus četros veidos: 1/2 un 6/8; 1/3 un 6/7; 2/3 un 5/7; 2/4 un 5/6. Šādi uzrakstīti skaitļus atbilst nosacījumiem (skat. 3. att.).

+	1	2
6	7	8
8	9	10

+	1	3
6	7	9
7	8	10

+	2	3
5	7	8
7	9	10

+	2	4
5	7	9
6	8	10

3. att.

b) 1. atrisinājums. Saulcerīte uz otras monētas varēja uzrakstīt skaitļus 1/2; 2/3; 6/7; 7/8 vai 8/9. Pamatosim, ka citu iespēju nav. Apzīmēsim trīs iegūtās summas, kas ir pēc kārtas esoši skaitļi, ar s; $s+1$ un $s+2$ un mazāko no uzrakstītajiem skaitļiem uz otras monētas ar a, bet otru skaitli ar b. Vismazāko no summām s var iegūt, saskaitot mazākos abu monētu skaitļus, tas ir, a un 4. Nākamo summu $s+1$ var iegūt, saskaitot mazāko skaitli ar nākamo mazāko skaitli, tas ir, a un 5. Lielāko no summām $s+2$ var iegūt, saskaitot divus lielākos skaitļus, tas ir, b un 5 (skat. 4. att.). Tā kā $a+5=s+1$ un $b+5=s+2$, tad a un b vērtības atšķiras tikai par 1 jeb $b=a+1$ un uz otras monētas uzrakstīties skaitļi atšķiras par 1. Tā kā uz pirmās monētas jau ir uzrakstīti skaitļi 4 un 5 un lielākais skaitlis ir 9, tad a nevar būt 3; 4; 5 vai 9. Tādā gadījumā a var būt 1; 2; 6; 7 vai 8.

+	4	5
a	s	$s+1$
b	?	$s+2$

4. att.

+	?	?
?	s	$s+1$
?	$s+2$	$s+3$

5. att.

2. atrisinājums. Saulcerīte uz otras monētas varēja uzrakstīt skaitļus 1/2; 2/3; 6/7; 7/8 vai 8/9. Pamatosim, ka citu iespēju nav. Pieņemsim, ka uz monētas uzrakstītie skaitļi ir a un b tā, lai $a<b$. Mazākā un lielākā no trim iegūtajām summām ir attiecīgi $a+4$ un $b+5$, turklāt šīs summas atšķiras par 2, tātad $b+5-(a+4)=2$ jeb $b=a+1$. Tā kā uz pirmās monētas jau ir uzrakstīti skaitļi 4 un 5 un lielākais skaitlis ir 9, tad a nevar būt 3; 4; 5 vai 9. Tādā gadījumā a var būt 1; 2; 6; 7 vai 8.

c) 1. atrisinājums. Apzīmēsim četras iegūtās summas, kas ir pēc kārtas esoši skaitļi, ar s; $s+1$; $s+2$ un $s+3$. Vismazāko summu s iegūst, saskaitot divus mazākos uzrakstītos skaitļus uz abām monētām, un vislielāko summu $s+3$ iegūst, saskaitot divus lielākos uzrakstītos skaitļus (skat. 5. att., kur $s+1$ un $s+2$ arī var būt samainīts vietām, tādā gadījumā visi tālākie spriedumi ir līdzīgi). Ievērojam, ka tieši divas no šīm summām ir pāra skaitļi (vai nu s un $s+2$, vai arī $s+1$ un $s+3$), un otras divas summas ir nepāra skaitļi. Pāra skaitli var iegūt, saskaitot divus pāra skaitļus vai divus nepāra skaitļus, bet nepāra skaitli var iegūt, saskaitot pāra un nepāra skaitli, tātad iespējami 4 dažādi gadījumi (skat. 6. att., kur pāra skaitlis apzīmēts ar P un nepāra skaitlis – ar N).

+	P	N
P	P	N
P	P	N

+	N	P
N	P	N
N	P	N

+	N	P
P	N	P
P	N	P

+	P	N
N	N	P
N	N	P

6. att.

Katrā no gadījumiem uz monētām ir uzrakstīts vai nu viens, vai trīs nepāra skaitļi.

2. atrisinājums. Apzīmēsim četras iegūtās summas, kas ir pēc kārtas esoši skaitļi, ar s; $s+1$; $s+2$ un $s+3$, un uz monētām uzrakstītos skaitļus – ar a/b un c/d. Līdz ar to visu iegūto summu kopējo summu var uzrakstīt divos veidos: $s+(s+1)+(s+2)+(s+3)=(a+c)+(a+d)+(b+c)+(b+d)$. Tātad $4s+6=2(a+b+c+d)$ jeb $2s+3=a+b+c+d$. Tā kā $2s+3$ ir nepāra skaitlis, jo pāra skaitļa $2s$ un nepāra skaitļa 3 summa ir nepāra skaitlis, tad visu uz monētm uzrakstīto skaitļu summa $a+b+c+d$ arī ir nepāra skaitlis. Lai 4 skaitļu summa būtu nepāra skaitlis, viens vai trīs no tiem ir nepāra skaitļi, tātad uz monētām ir uzrakstīts vai nu viens, vai trīs nepāra skaitļi.

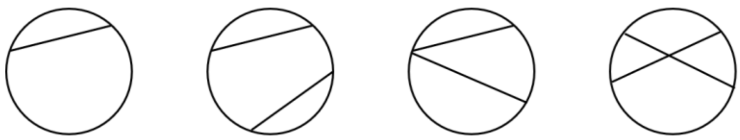
5. uzdevums

Katram 7. klases skolēnam tika uzdots mājasdarbā sadalīt vienu riņķi vairākās daļās ar taisnēm, kuras nesakrīt. Cik dažādas atbildes skolēni varēja iegūt, ja riņķi jāsadala daļās ar **a)** 3 taisnēm; **b)** 4 taisnēm?

Atrisinājums. Tā kā mūs interesē jautājums par to, cik daļās tiek sadalīts riņķis, t.i., riņķa līnija kopā ar tās iekšpusi, tad tādu taišņu vietā, kuras krusto riņķa līnija 2 punktos, varam apskatīt riņķa līnijas hordas – nogriežņus, kas savieno divus riņķa līnijas punktus.

a) Skolēni varēja iegūt 4 dažādas atbildes: 4; 5; 6 vai 7 daļās. Pamatosim, ka citu iespēju nav.

Viena horda sadala riņķi 2 daļās, divas hordas – 3 vai 4 daļās (skat. 7. att.).

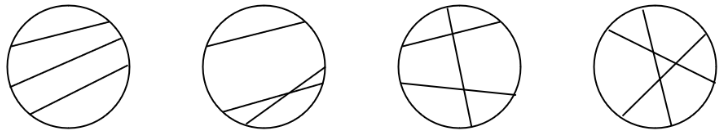


7. att.

Iespējami trīs gadījumi, kā var būt novilkta trešā horda.

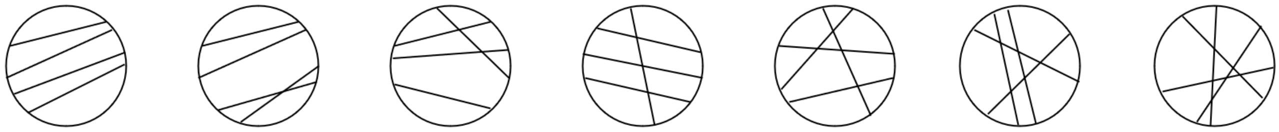
1. Ja trešā horda nekrusto nevienu no abām jau novilktajām, tad tā vienu no daļām sadala 2 daļās, un daļu skaits ir $3+1$ vai $4+1$, tas ir, 4 vai 5.
2. Ja trešā horda krusto vienu no abām jau novilktajām, tad tā ar šo krustpunktu tiek sadalīta 2 nogriežņos, un katrs no šiem nogriežņiem sadala vienu no agrākajām divu hordu veidotajām daļām 2 daļās. Tātad daļu skaits $3+2$ vai $4+2$, tas ir, 5 vai 6.
3. Ja trešā horda krusto abas jau novilktās hordas, tad krustpunkti sadala šo hordu 3 nogriežņos, un katrs no tiem dala vienu no agrākajām divu hordu veidotajām daļām 2 daļās.

Tātad daļu skaits ir $3+3$ vai $4+3$, tas ir, 6 vai 7. Tātad 3 hordas dala riņķi 4, 5, 6 vai 7 daļās (skat. 8. att.).



8. att.

b) Līdzīgi analizējot iespējas, kā var novilkt ceturto hordu, iegūstam, ka 4 hordas dala riņķi 5, 6, 7, 8, 9, 10 vai 11 daļās (skat. 9. att.), tātad skolēni varēja iegūt 7 dažādas atbildes.



9. att.

Uzdevumi 8. un 9. klašu skolēniem

6. uzdevums

Marekam ir sviru svari un 10 akmeņi ar dažādām masām. Mareks šos akmeņus pa vienam liek kādā no kausiem. Pēc katra ieliktā akmens Mareks piefiksē, kurš kauss ir nosvēries uz leju. Ja tas ir labais kauss, tad atzīmē ar "L", ja kreisais, tad attiecīgi ar "K". Vai Mareks vienmēr var izveidot virkni KKLLKKLLKK?

Atrisinājums. Apzīmēsim akmeņu masas ar $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \cdots > a_{10}$. Parādīsim, kā pakāpeniski Marekam būtu jāievieto akmeņi kausos, lai iegūtu virkni KKLLKKLLKK. Akmeņus ar nepāra indeksiem liksim kreisajā kausā, bet akmeņus ar pāra indeksiem liksim labajā kausā. Tādā gadījumā Mareks secīgi var ievietot šos akmeņus kausos, lai iegūtu prasīto virkni:

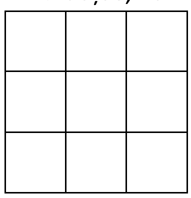
$$a_5, a_6, a_4, a_7, a_3, a_8, a_2, a_9, a_1, a_{10}.$$

Pirmais akmens nosvērs kausu pa kreisi, bet otrs svarus neietekmēs, jo $a_5 > a_6$. Pēc trešā akmens svari nosvērsies uz labo kausu, jo $a_4 > a_5$. Līdzīgi ceturtais akmens neietekmēs rezultātu, jo $a_4 + a_6 > a_5 + a_7$. Šādi varam tupināt līdz izvietoti visi akmeņi. Piektais, septītais un devītais akmens būs tie, kas nosvērs svarus uz pretējo kausu, bet sestais, astotais un desmitais akmens neietekmēs rezultātu.

7. uzdevums

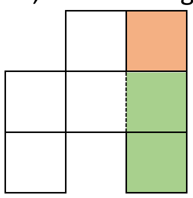
Sandra vēlas iesaiņot dāvanu, kas atrodas kastē ar izmēriem $10 \times 10 \times 10$. Viņai ir pieejama viena loksne dāvanu papīra ar izmēriem 30×30. Parādi, kā no šī dāvanu papīra var izgriezt vienu figūru, kurā var iesaiņot Sandras dāvanu!
Piezīme. Dāvanu papīrs var pārklāties.

Atrisinājums. Sadalīsim iesaiņojuma papīra loksni 3×3 daļās, kur katrs kvadrāts ir ar izmēriem 10×10 (skat. 10. att.).



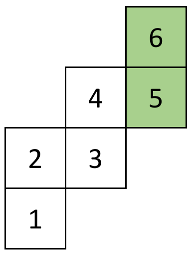
10. att.

No šī kvadrāta izgriezīsim figūru, kas redzama 11. att., un veiksim griezumu, kas atbilst raustītajai līnijai.



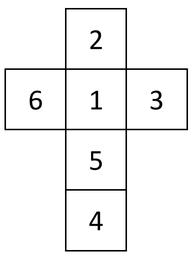
11. att.

Tagad strēmeli, kas satur zaļā krāsā iekrāsotās rūtiņas, varam pārlocīt pāri oranžajam kvadrātam, lai iegūtu figūru, kas redzama 12. att.



12. att.

Šī figūra spēj noklāt kubu, kur 12. att. redzamie sanumurētie kvadrāti noklāj attiecīgo skaldni kuba standarta izkārtojumā 13. att.



13. att.