

Teorijas materiāls 2. un 6. uzdevumam

Svēršanas uzdevumi

Svēršanas uzdevumos galvenokārt izmantosim sviras svarus. Svariem ir divi svaru kausi. Svēršanā **neizmantosim** atsvarus. Svāri **neparādīs** ķermeņu masu. Mēs varēsim tikai redzēt, vai abi svaru kausi ir līdzsvarā.



Aplūkosim uzdevumus, kuros, izmantojot doto informāciju, galvenokārt tiks prasīts atrast vienu (vai vairākus) no pārējiem objektiem atšķirīgu objektu. Šo uzdevumu atrisinājumi lielākoties balstās uz loģisku spriedumu ceļā izveidotām objektu grupēšanas metodēm.

legaumē!

Ja uzdevumā ir jautājums “Kā...?”, tad atrisinājumā ir jāapskata, kā rīkoties **pilnīgi visās** iespējamajās situācijās, lai panāktu prasīto rezultātu. Nepietiek apskatīt tikai vienu vai dažus “labvēlīgākos” gadījumus.

Uzdevumu piemēri

1. Dots 20 pēc ārējā izskata vienādas monētas, bet visas to masas ir dažādas. Kā, izmantojot sviras svarus bez atsvariem, ar 28 svēršanām atrast gan pašu vieglāko, gan pašu smagāko monētu?

Atrisinājums. Sadalām monētas pa pāriem un salīdzinām katra pāra monētas – nosakām vieglāko un smagāko monētu katrā pāri. Pēc katras svēršanas vieglāko monētu liekam vienā kaudzītē, bet smagāko – otrā kaudzītē. Tā kā ir $20 : 2 = 10$ pāri, tad ir veiktas 10 svēršanas (skat. 1. att.). Visvieglākā monēta jāmeklē starp vieglākajām, bet vissmagākā – starp smagākajām. Apskatām katru kaudzīti atsevišķi.

No kaudzītes, kurā ir vieglākās monētas, paņemam divas un salīdzinām tās, vieglāko atstājam svaros un salīdzinām ar nākamo, atkal svaros atstājot vieglāko. Tā turpinām, kamēr visas atlikušās monētas no šīs kaudzītes ir nosvērtas. Pēdējās svēršanas vieglākā monēta ir pati vieglākā no visām. Kopā tika veiktas 9 svēršanas.

Analoģiski no kaudzītes, kurā ir smagākās monētas, atrod pašu smagāko no visām – svaros visu laiku jāatstāj smagākā monēta, bet vieglākā jāmet prom. Kopā tika veiktas 9 svēršanas.

Līdz ar to ar $10 + 9 + 9 = 28$ svēršanām esam atraduši gan pašu vieglāko, gan pašu smagāko monētu.



1. att.

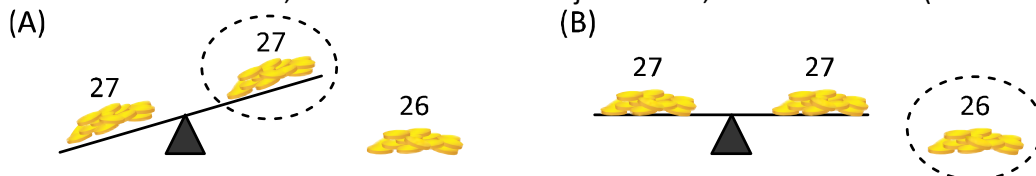
2. Zināms, ka no 80 monētām viena ir viltota – tā ir vieglāka nekā pārējās, kurām visām ir vienāda masa. Kā ar četrām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast viltoto monētu?

Atrisinājums. Sadalām monētas trīs kaudzītēs: divas kaudzītes pa 27 monētām katrā un viena kaudzīte, kurā ir 26 monētas.

Pirmajā svēršanā salīdzinām kaudzītes, kurās ir pa 27 monētām. Iespējami divi gadījumi.

(A) Ja viens svaru kauss ir vieglāks nekā otrs, tad uz tā atrodas viltotā monēta (skat. 2. att. (A)).

(B) Ja abi svaru kausi ir līdzsvarā, tad viltotā monēta ir tajā kaudzītē, kas atradās malā (skat. 2. att. (B)).



2. att.

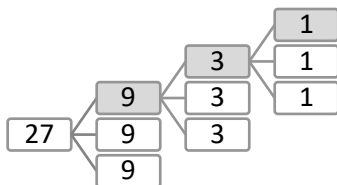
Tālāk apskatīsim tikai to kaudzīti, kurā ir viltotā monēta, pārējās kaudzītes vairs nav nepieciešamas. Tātad atlikušajās trīs svēršanās no 27 monētām jāatrod viltotā. (Ja viltotā monēta atradās kaudzītē, kurā bija 26 monētas, tad šai kaudzītei pievienojot vienu “īsto” monētu no citas kaudzītes, arī iegūstam kaudzīti, kurā ir 27 monētas.)

Sadalām 27 monētas trīs vienādās kaudzītēs pa 9 monētām katrā un otrajā svēršanā salīdzināsim savā starpā divas no šīm kaudzītēm. Atkārtojot tādas pašus spriedumus kā pēc pirmās svēršanas, atrodam to deviņu monētu kaudzīti, kurā atrodas viltotā monēta.

Pirms trešās svēršanas atkal kaudzīti, kurā atrodas viltotā monēta sadalām trīs vienādās kaudzītēs pa trim monētām katrā un atkal salīdzinām divas no šīm kaudzītēm. Nosakām, kurā no šīm trīs monētu kaudzītēm atrodas viltotā monēta.

Ceturtajā svēršanas reizē uz svaru kausiem liekam pa vienai monētai. Ja viens svaru kauss ir vieglāks nekā otrs, tad uz tā atrodas viltotā monēta, ja abi svaru kausi ir līdzsvarā, tad viltotā monēta ir tā, kas šajā svēršanas reizē palika malā (netika svērta).

(Shematiski monētu dalīšana mazākās kaudzītēs parādīta 3. att., iekrāsojums apzīmē kaudzīti, kurā atrodas viltotā monēta.)



3. att.

3. Dotas 25 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Zināms, ka 24 monētu masas ir vienādas savā starpā, bet vienas monētas masa ir citāda. Kā ar divām svēršanām uz sviras svāriem bez atsvariem noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir vieglāka vai smagāka nekā pārējās? (Pašu monētu atrast nav nepieciešams.)

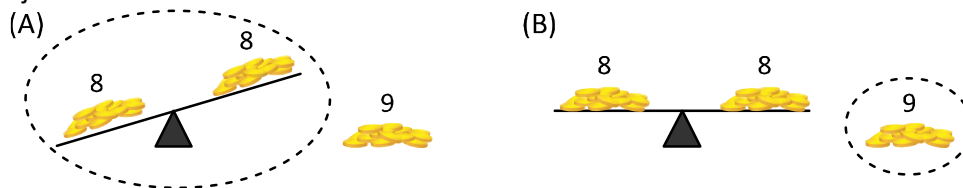
Atrisinājums. Uzliekam uz katra svaru kausa 8 monētas.

(A) Ja pirmajā svēršanā svāri nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir atradusies uz svāriem (skat. 4. att. (A)). Otrajā svēršanā salīdzinām vieglākā kausa 8 monētas ar jebkurām 8 malā palikušajām (parastajām) monētām.

- Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta pirmajā svēršanā ir bijusi uz "smagākā" kausa un ir smagāka nekā citas monētas.
- Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta pirmajā svēršanā ir bijusi uz "vieglākā" kausa un ir vieglāka nekā citas monētas.

(B) Ja kausi ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta palikusi malā (skat. 4. att. (B)). Otrajā svēršanā salīdzinām malā palikušās 9 monētas ar jebkurām 9 jau svērtajām (parastajām) monētām.

- Ja svaru kauss ar 9 parastajām monētām nosveras uz leju, tad atšķirīgā monēta ir vieglāka nekā pārējās.
- Ja svaru kauss ar 9 parastajām monētām nosveras uz augšu, tad atšķirīgā monēta ir smagāka nekā pārējās.

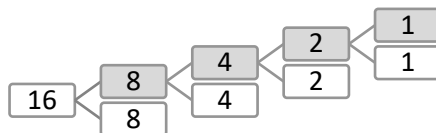


4. att.

4. Grozā ir 16 akmeņi – 15 parasti, 1 radioaktīvs. Tie visi izskatās vienādi. Ir dota ierīce, ar kuras palīdzību var noteikt, vai starp apskatāmajiem akmeņiem ir vai nav radioaktīvais akmens (ar ierīci var pārbaudīt arī vairākus akmeņus reizē, bet ierīce nenorāda, kurš tieši ir radioaktīvais akmens). Kā ar 4 pārbaudēm atrast radioaktīvo akmeni?

Atrisinājums. Sākumā sadalām visus 16 akmeņus divās kaudzītēs pa 8 akmeņiem katrā un pārbaudām vienu kaudzīti. Neatkarīgi no pārbaudes rezultāta, varēs pateikt, kurā kaudzītē ir meklētais akmens. Pēc tam to kaudzīti, kurā ir radioaktīvais akmens, atkal sadala divās daļās, pa 4 akmeņiem katrā un pārbauda vienu no tām. Tālāk kaudzīti, kurā ir meklētais akmens, atkal sadala divās daļās pa 2 akmeņiem katrā un atkal pārbauda vienu no tām. Beidzot pārbauda vienu no diviem akmeņiem, no kuriem viens ir radioaktīvais akmens, un noskaidro, kurš tieši tas ir.

(Shematiski akmeņu dalīšana mazākās kaudzītēs parādīta 5. att., iekrāsojums apzīmē kaudzīti, kurā atrodas radioaktīvais akmens.)

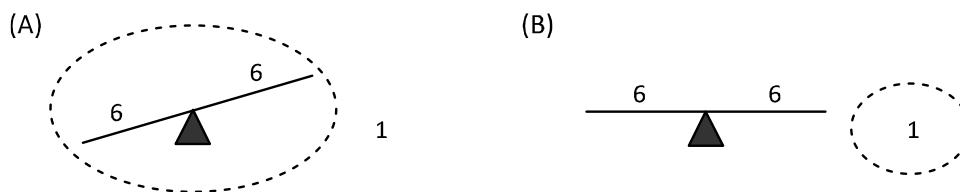


5. att.

5. Dotas 13 pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām 12 monētas ir ar vienādu masu, bet viena – ar atšķirīgu. Doti arī sviras svāri bez atsvariem. Kā, izmantojot divas svēršanas, noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir vieglāka vai smagāka nekā pārējās? (Pašu monētu atrast nav nepieciešams.)

Atrisinājums. Katrā svaru kausā ieliekam 6 monētas.

- (A) Ja pirmajā svēršanā svāri nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir atradusies uz svāriem (skat. 6. att. (A)). Otrajā svēršanā katrā svaru kausā ieliekam pa trīs monētām no “vieglākā” kausa.
- Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta pirmajā svēršanā ir bijusi uz “smagākā” kausa un ir smagāka nekā citas monētas.
 - Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta pirmajā svēršanā ir bijusi uz “vieglākā” kausa un ir vieglāka nekā citas monētas.
- (B) Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir tā, kas nebija uz svāriem (skat. 6. att. (B)). Otrajā svēršanā salīdzinot to ar kādu no svērtajām monētām, noskaidrojam, vai tā ir vieglāka vai smagāka nekā pārējās monētas.



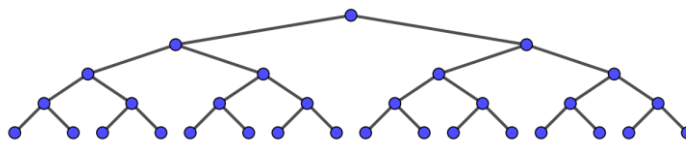
6. att.

Tālāk dotie piemēri vairāk paredzēti 8.-9. klases skolēniem, bet tos var izmantot arī jaunāku klašu skolēni.

6. Doti 16 akmeņi ar dažādām masām. Pierādiet, ka ar 18 svēršanām uz sviru svāriem bez atsvariem var atrast pašu smagāko un otru smagāko akmeni!

Atrisinājums. Lai atrastu vissmagāko akmeni, ir nepieciešamas 15 svēršanas – rīkojamies pēc klasiskās olimpiskās shēmas, tas ir, sākumā sadalām visus akmeņus pāros un katrā pāri atrodam smagāko akmeni (8 svēršanas), tad šos 8 atrastos akmeņus sadalām četros pāros un katrā no tiem atrodam smagāko akmeni (4 svēršanas), pēc tam atrastos četrus akmeņus sadalām divos pāros un katrā pāri atrodam smagāko akmeni (2 svēršanas), visbeidzot salīdzinām pēdējos divus akmeņus (1 svēršana) (skat. 7. att.). Tātad ar 15 svēršanām jau esam atraduši pašu smagāko akmeni. Vēl jāatrod otrs smagākais akmens.

Otrs smagākais akmens var būt tikai kāds no tiem četriem akmeņiem, kas tika salīdzināti ar pašu smagāko akmeni. Smagākais akmens no četriem akmeņiem atrodams ar 3 svēršanām, piemēram, salīdzinām divus akmeņus (1 svēršana), smagāko atstājam svaros un to salīdzinām ar vienu no nesvērtajiem akmeņiem (1 svēršana), atkal svaros atstājot smagāko, tad šo pašu darbību atkārtojam vēlreiz (1 svēršana). Tas nozīmē, ka ar $15 + 3 = 18$ svēršanām var atrast pašu smagāko un otru smagāko akmeni no 16 akmeņu kaudzes.



7. att.

7. Dotas 4 pēc ārējā izskata vienādas monētas, kuru masas ir 1 g, 2 g, 3 g un 4 g. Kā ar četrām svēršanām uz sviras svāriem bez atsvariem noskaidrot katras monētas masu?

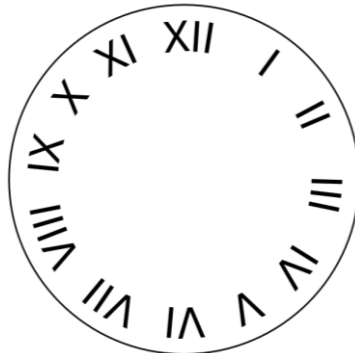
Atrisinājums. Vispirms uz katra svaru kausa uzliekam pa 2 monētām (1 svēršana).

- Ja pirmajā svēršanā svāri atrodas līdzsvarā, tad šādu svaru stāvokli izsaka tikai vienādība $1 + 4 = 2 + 3$. Ar divām svēršanām nosakām abas smagākās monētas pāros (1; 4) un (2; 3). Ceturtajā svēršanā salīdzinām šīs smagākās monētas savā starpā, tas ir, noskaidrojam, kura no monētām ir 3 g, kura – 4 g. Monēta, kas pirmajā svēršanā atradās uz viena kausa ar 4 g monētu, sver 1 g, bet tā monēta, kas pirmajā svēršanā atradās uz viena kausa ar 3 g monētu, sver 2 g.
- Ja pirmajā svēršanā svāri nav līdzsvarā, tad ir divas iespējas: vai nu $1 + 2 < 3 + 4$, vai $1 + 3 < 2 + 4$. Otrajā svēršanā salīdzinām abas monētas no smagākā pāra – smagākā no tām ir 4 g. Trešajā svēršanā salīdzina vieglākā pāra monētas – vieglākā no tām ir 1 g. Ceturtajā svēršanā salīdzina atlikušās divas monētas: vieglākā no tām ir 2 g, bet smagākā – 3 g.

Profesora Cipariņa klubs
2024./2025. mācību gads
3. kārtas uzdevumi

1. uzdevums

Parādi, kā 8. att. doto pulksteņa ciparnīcu var sadalīt četrās daļās tā, lai katrā daļā ierakstīto romiešu skaitļu summa būtu 20.



8. att.

2. uzdevums

Rūķim Konfektim dotas 7 pēc ārējā izskata vienādas konfektes. No tām 5 konfektes ir ar vienādu masu, bet divām konfektēm masa ir savstarpēji vienāda, bet mazāka nekā pārējām piecām. Kā viņš ar trim svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem var atrast abas vieglākās konfektes?

3. uzdevums

Doti trīs dažādi skaitļi P ; C un K . Zināms, ka katru divu šo skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir pirmskaitlis un **a)** šie pirmskaitļi var būt arī vienādi; **b)** šie pirmskaitļi ir dažādi. Kāda ir mazākā iespējamā summas $P + C + K$ vērtība?

4. uzdevums

Profesors Cipariņš katram skolēnam iedeva divas baltas papīra monētas un uzdeva uz katras monētas katras puses uzrakstīt vienu atšķirīgu skaitli no 1 līdz 9 (kopā četrus dažādus skaitļus). Tālāk skolēniem bija jāmet abas papīra monētas vairākas reizes un katru reizi jāpieraksta abu uzņemto skaitļu summu.

- Auseklis ieguva tikai summas 7; 8; 9 un 10. Uzraksti visus četrus veidus, kādus skaitļus viņš varēja uzrakstīt uz monētām!
- Saulcerīte uz vienas monētas abām pusēm uzrakstīja skaitļus 4 un 5. Vienīgās summas, kuras viņa ieguva, bija trīs pēc kārtas esoši skaitļi. Kādus skaitļus Saulcerīte varēja uzrakstīt uz otras monētas katras puses?
- Rota ieguva tikai tādas summas, kuras ir četri pēc kārtas esoši skaitļi. Pierādi, ka vai nu viens, vai trīs no viņas uzrakstītajiem skaitļiem bija pāra skaitļi.

5. uzdevums

Katram 7. klases skolēnam tika uzdots mājasdarbā sadalīt vienu riņķi vairākās daļās ar taisnēm, kuras nesakrīt. Cik dažādas atbildes skolēni varēja iegūt, ja riņķi jāsadala daļās ar **a)** 3 taisnēm; **b)** 4 taisnēm?

Uzdevumi 8. un 9. klašu skolēniem

6. uzdevums

Marekam ir sviras sviri un 10 akmeņi ar dažādām masām. Mareks šos akmeņus pa vienam liek kādā no kausiem. Pēc katra ielikta akmens Mareks piefiksē, kurš kauss ir nosvēries uz leju. Ja tas ir labais kauss, tad atzīmē ar "L", ja kreisais, tad attiecīgi ar "K". Vai Mareks vienmēr var izveidot virkni KKLLKLLKK?

7. uzdevums

Sandra vēlas iesaiņot dāvanu, kas atrodas kastē ar izmēriem $10 \times 10 \times 10 \text{ cm}^3$. Viņai ir pieejama viena loksne dāvanu papīra ar izmēriem $30 \times 30 \text{ cm}^2$. Parādi, kā no šī dāvanu papīra var izgriezt vienu figūru, kurā var iesaiņot Sandras dāvanu!

Piezīme. Dāvanu papīrs var pārklāties.