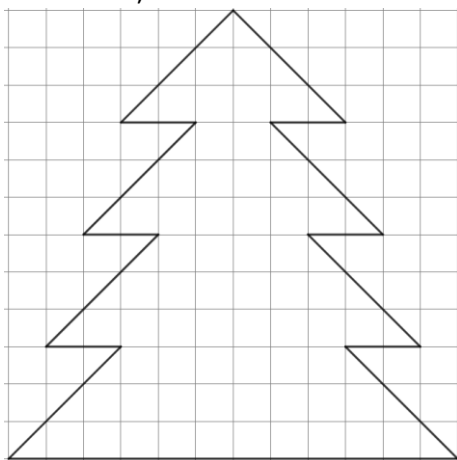


Profesora Cipariņa klubs
2024./2025. mācību gads
4. kārtas uzdevumu atrisinājumi

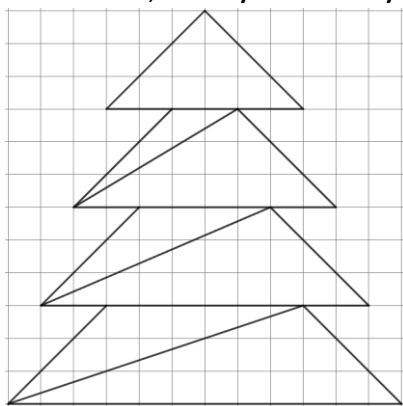
1. uzdevums

Sadali 1. att. figūru **a)** 7 trijstūros; **b)** 6 vienādās daļās!

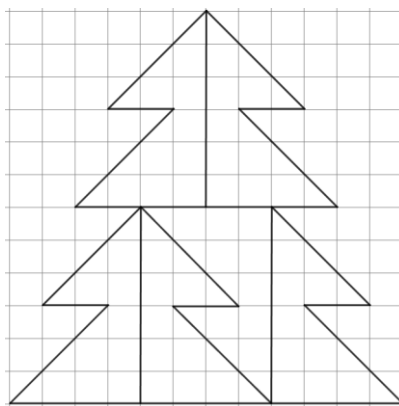


1. att.

Atrisinājums. Piemēram, skat. **a)** 2. att. un **b)** 3. att.



2. att.



3. att.

2. uzdevums

Kādā vakarā Guna trenējās reizināt trīs pēc kārtas esošus naturālus skaitļus, kas nepārsniedz 2025. Cik no iegūtajiem reizinājumiem dalās ar 111?

Atrisinājums. Apzīmēsim trīs pēc kārtas esošus skaitļus ar x , $x + 1$ un $x + 2$. Ievērojam, ka $111 = 37 \cdot 3$. Lai skaitlis dalītos ar 111, tam jādalās ar 37 un ar 3. Tā kā 37 ir pirmskaitlis, tad vienam no skaitļiem x , $x + 1$ vai $x + 2$ jādalās ar 37. Starp trīs pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 3, tāpēc dotais reizinājums vienmēr dalās ar 3.

No 1 līdz 2025 (2025 ir lielākā iespējamā $x + 2$ vērtība) ir 54 skaitļi, kas dalās ar 37 (lielākais no tiem ir $1998 = 54 \cdot 37$). Tātad 54 veidos var izvēlēties tādu x , kas dalās ar 37; 54 veidos – tādu x , ka $x + 1$ dalās ar 37 un 54 veidos – tādu x , ka $x + 2$ dalās ar 37, tas ir, pavisam ir $54 + 54 + 54 = 162$ tādi skaitļi x , ka $x(x + 1)(x + 2)$ dalās ar 111.

3. uzdevums

Rindā uzrakstīti 2025 skaitļi un pirmais skaitlis ir 18. Katru nākamo skaitli iegūst:

- iepriekšējo skaitli, ja tas ir pāra, dalot ar 2;
- iepriekšējo skaitli, ja tas ir nepāra, reizinot ar 5 un pieskaitot 3.

Kuri rindā uzrakstītie skaitļi sakrīt ar savu kārtas numuru (piemēram, rindas 3. skaitļa kārtas numurs ir 3)?

Atrisinājums. Rindā daži pirmie uzrakstītie skaitļi redzami tabulā.

Nr. p. k.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	...
Skaitlis	18	9	48	24	12	6	3	18	9	48	24	12	6	3	...

Tā kā katrs nākamais skaitlis rindā ir atkarīgs no viena iepriekšējā rindas skaitļa, tad, līdzko parādās viens jau iepriekš bijis skaitlis, izveidojas periods. Tā kā rindas 1. un 8. cipars ir 18, tad rinda ir periodiska, sākot ar 8. locekli, un perioda garums ir 7. Tabulā redzams, ka skaitļi 6; 9 un 12 atbilst nosacījumiem. Tā kā skaitlis 3 nav ar kārtas numuru 3, aplūkosim, vai skaitļu 18; 24 vai 48 kārtas numuri nav vienādi ar pašu skaitli.

Skaitlis	Kārtas numuri
18	1; 8; 15; 22; ...
24	4; 11; 18; 25; ...
48	3; 10; 17; 24; 31; 38; 45; 52; ...

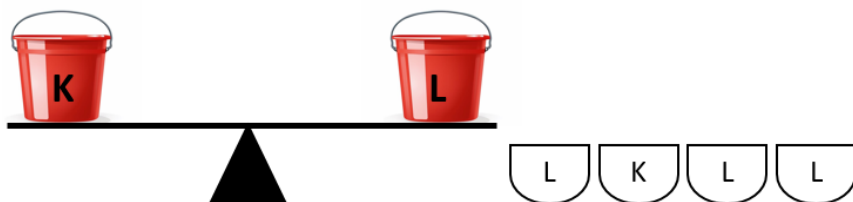
Tā kā visi perioda skaitļi ir mazāki nekā nākamie kārtas numuri, vienīgi skaitļi 6; 9 un 12 sakrīt ar savu kārtas numuru.

4. uzdevums

Uz sviras svariem bez atsvariem uzlikti divi spaiņi – labajā pusē spainis ar nosaukumu L, kreisajā pusē spainis ar nosaukumu K (skat. 4. att.). Šajos spaiņos tiek liktas lodītes. Svariem iespējami trīs novietojumi:

- ja spaiņos ir vienāds lodīšu skaits, tad tie atrodas līdzsvarā;
- ja spaiņos lodīšu skaits atšķiras tieši par 1, tad sviri nav līdzsvarā, bet spaiņi joprojām atrodas uz svariem un neviena lodīte no tiem neizkrīt;
- ja spaiņos lodīšu skaits atšķiras par vismaz 2, tad spaiņi nokrīt un visas lodītes izkrīt no spaiņiem.

Blakus svariem ir vairākas bļodas, kurās ir vairākas lodītes. Ja bļodas nosaukums ir L, tad tajā atrodas lodītes ar nosaukumu L un tās tiek liktas spainī L. Ja bļodas nosaukums ir K, tad tajā atrodas lodītes ar nosaukumu K un tās tiek liktas spainī K.



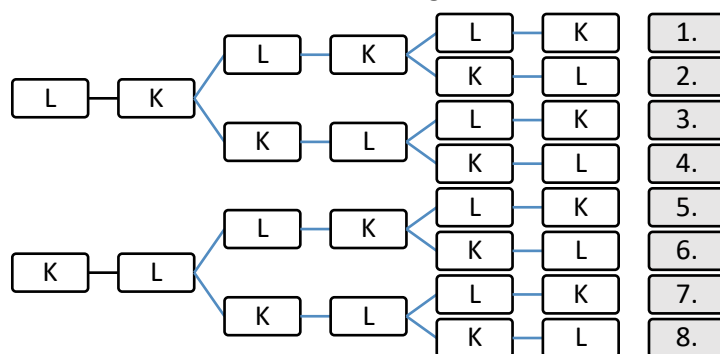
4. att.

- a) Pie svariem ir noliktas 6 bļodas kaut kādā secībā. No katras bļodas pēc kārtas (sākot no kreisās puses) tiek paņemta viena lodīte un ielikta attiecīgajā spainī. Kādas ir visas iespējamās bļodu secības, lai spaiņi no svariem nenokristu (piemēram, 4. att. bļodu secība ir LKLL)?
- b) Pie svariem noliktas 6 bļodas kaut kādā secībā. Līdzīgi a) gadījumam, no katras bļodas pēc kārtas (sākot no kreisās puses) tiek paņemta viena lodīte un ielikta attiecīgajā spainī un spaiņi nevienā brīdī nenokrīt. Pēc tam spaiņi tiek iztukšoti un no katras otrās bļodas (tas ir, no 2., 4. un 6. bļodas) tiek paņemta viena lodīte un ielikta attiecīgajā spainī, atkal spaiņi nevienā brīdī nenokrīt. Pēc tam spaiņi tiek atkal iztukšoti un no katras trešās bļodas (tas ir, no 3. un 6. bļodas) tiek paņemta viena lodīte un ielikta attiecīgajā spainī, atkal spaiņi nevienā brīdī nenokrīt. Kādas ir visas iespējamās bļodu secības, lai varētu veikt visas šīs darbības pēc kārtas, nemainot bļodu secību?

Ja lodītes tiek ņemtas no katras bļodas, katras otrās bļodas, katras trešās bļodas, utt., tad saucim šādu procesu par attiecīgi 1-kārtu, 2-kārtu, 3-kārtu un vispārīgā gadījumā par m -kārtu. Piemēram, b) gadījumā tika veikta 1-kārta, 2-kārta un pēc tam 3-kārta.

- c) Pierādi, ka nav iespējams sakārtot 12 bļodas tādā secībā, lai spaiņi nenokristu, veicot jebkuru m -kārtu!

Atrisinājums. a) Lai spaiņi nenokristu, tajos lodīšu skaits var būt vienāds vai atšķirties par 1, tad visas iespējamās 6 bļodu secības, lai spaiņi no svariem nenokristu, redzamas diagrammā.



Atrisinājums. Aplūkosim, kā mainītos bērnu atbildes, ja katram no viņiem būtu mainīta loma – bērns, kurš saka patiesību (neēda kūskiņus), kļūst par bērnu, kurš mānās (noēda kūskiņu), un otrādi. Ja bērnam A pa labi stāv bērns B, tad tabulā redzamas visas iespējamās atbildes un situācija pēc lomu mainīšanas.

Patiesā situācija			Pēc lomu mainīšanas		
A	B	A saka par B	A	B	A saka par B
Mānās	Mānās	Saka patiesību	Saka patiesību	Saka patiesību	Saka patiesību
Mānās	Saka patiesību	Mānās	Saka patiesību	Mānās	Mānās
Saka patiesību	Mānās	Mānās	Mānās	Saka patiesību	Mānās
Saka patiesību	Saka patiesību	Saka patiesību	Mānās	Mānās	Saka patiesību

Ievērojam, ka visas atbildes paliek tādas pašas. Tāpēc vecmāmiņa nevarēja šīs situācijas atšķirt vienu no otras, bet uzdevuma atbildei jāizpildās abās situācijās. Šādas pārmaiņas rezultātā tā daļa bērnu, kas mānās, pēc lomu mainīšanas saka patiesību, un otrādi. Pieņemsim, ka bija m bērnu, kas mānījās un p bērnu, kas teica patiesību. Tad bērnu, kas mānījās, daļa ir $\frac{m}{m+p}$. Situācijā pēc lomu mainīšanas, bērnu, kas mānās, daļa ir $\frac{p}{m+p}$. Vienīgā iespēja, kad vecmāmiņa varēja nekļūdīgi noskaidrot bērnu, kas mānās, daļu, ir tad, ja $\frac{m}{m+p} = \frac{p}{m+p}$. Tad $m = p$, un bērnu, kas mānījās jeb bija jau noēduši pa vienam kūskiņam, ir tieši puse no visiem bērniem. Uzdevumā aprakstītā situācija ir iespējama, piemēram, ja pavisam bija 2 bērni: viens saka patiesību, otrs mānās.

Uzdevumi 8. un 9. klašu skolēniem

6. uzdevums

Vai skaitlis, kas sastāv no 2025 sešiniekiem un kādu skaitu nullēm, var būt naturāla skaitļa kvadrāts?

Atrisinājums. Pierādīsim no pretējā, ka šāds skaitlis nekad nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts. Pieņemsim, ka pastāv tāds skaitlis A , kas sastāv no 2024 sešiniekiem un kādu skaitu nullēm, un pie tam ir naturāla skaitļa kvadrāts. Ja skaitlis A ir kvadrāts, tad tas beidzas ar pāra skaitu nullēm (ja nav neviena nulle beigās, tad tas arī ir pāra skaits, jo skaitlis 0 ir pāra), jo 10 kā reizinātājs tajā ietilpst pāra skaits reižu. Nodzēšot šīs nulles, mēs iegūstam skaitli $2B$, kur B ir skaitlis, kas sastāv no 2025 trijniekiem un kādu skaitu nullēm starp tiem. Pie tam skaitlis $2B$ arī ir kvadrāts, jo mēs nodzēsām tikai pāra skaitu nulles. Bet tā kā skaitļa B pēdējais cipars ir 3 (tas nav pāra skaitlis), tad $2B$ dalās tikai ar 2, bet ne ar 4. Tas ir pretrunā ar to, ka $2B$ ir naturāla skaitļa kvadrāts, tas ir, tam katrs pirmreizinātājs ir pāra skaitā. Secinām, ka pieņēmums, ka A ir naturāla skaitļa kvadrāts, ir bijis aplams.

7. uzdevums

Kaspars un Rota pamīšus nokrāso kādu rūtiņu melnā krāsā kvadrātā ar izmēriem 4×4 rūtiņas. Zaudē tas, pēc kura gājiena tiek iegūts melns kvadrāts ar izmēriem 2×2 rūtiņas. Kurš spēlētājs – Kaspars vai Rota – vienmēr var uzvarēt, ja Kaspars sāk pirmais?

Atrisinājums. Pamatosim, ka Rota vienmēr var uzvarēt. Sadalīsim rūtiņu tabulu skaitļu pāros (skat. 5. att.).

1	2	3	4
5	6	7	8
1	2	3	4
5	6	7	8

5. att.

Rotai katru reizi jānokrāso rūtiņa, kas atbilst tam pašam skaitlim, kuru nokrāso Kaspars. Līdz ar to, ja pēc Kaspara gājiena netiek iegūts melns kvadrāts ar izmēriem 2×2 rūtiņas, tad arī pēc Rotas gājiena tas nenotiek. Tā kā spēlē ir iespējams galīgs skaits gājienu, tad pēc Kaspara gājiena vispirms tiks iegūts melns kvadrāts ar izmēriem 2×2 rūtiņas.