Teorijas materiāls 2. un 6. uzdevumam
Skaitļa sadalīšana pirmreizinātājos

Par **pirmskaitli** sauc naturālu skaitli, kuram ir tieši divi dažādi dalītāji.
Tā kā skaitlis 1 dalās tikai ar 1 (tam ir tikai viens dalītājs), tad 1 nav pirmskaitlis.
Pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz. Mazākie pirmskaitļi:

$$2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; \ldots$$

Skaitlis 2 ir vienīgais pāra pirmskaitlis.

Par **saliktu skaitli** sauc skaitli, kuram ir vairāk nekā divi dalītāji.
Piemēram, skaitlis 6 ir salikts skaitlis, jo tas dalās ar 1; 2; 3 un 6.

Ja $b \neq 0$ un $a : b = k$, kur a, b, k – veseli skaitļi, tad saka, ka $\boldsymbol{a}$ **dalās ar** $\boldsymbol{b}$. Pretējā gadījumā saka, ka a nedalās ar b.

Kā noteikt, vai skaitlis ir pirmskaitlis?

Lai pamatotu, ka dotais skaitlis n ir pirmskaitlis, ir jāpārbauda, vai tas dalās ar visiem pirmskaitļiem no 1 līdz $\sqrt{n}$ ieskaitot.

Piemēram, lai pamatotu, ka skaitlis 43 ir pirmskaitlis, jāpārbauda, vai tas dalās ar 2; 3; 5 (ar lielākiem pirmskaitļiem dalāmību pārbaudīt nav nepieciešams, jo jau $7^2 = 49 > 43$). Tā kā 43 nedalās ar 2; 3; 5, tad tas ir pirmskaitlis.

Dalāmības pazīmes
Skaitlis dalās ar **2**, ja tā pēdējais cipars ir pāra, tas ir, tā pēdējais cipars ir 0, 2, 4, 6 vai 8.
Skaitlis dalās ar **3**, ja tā ciparu summa dalās ar 3.
Skaitlis dalās ar **4**, ja tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis dalās ar 4.
Skaitlis dalās ar **5**, ja tā pēdējais cipars ir 0 vai 5.
Skaitlis dalās ar **6**, ja tas dalās gan ar 2, gan ar 3.
Skaitlis dalās ar **8**, ja tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8.
Skaitlis dalās ar **9**, ja tā ciparu summa dalās ar 9.
Skaitlis dalās ar **10**, ja tā pēdējais cipars ir 0.
Skaitlis dalās ar **11**, ja tā ciparu summas, kas atrodas nepāra pozīcijās, un ciparu summas, kas atrodas pāra pozīcijās, starpība dalās ar 11.

Pirmskaitļus, kuru reizinājums ir dotais skaitlis, sauc par šī skaitļa **pirmreizinātājiem**.
Piemēram, skaitļa 20 pirmreizinātāji ir 2; 2 un 5, jo $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$.
Tātad, lai skaitli sadalītu pirmreizinātājos, skaitli jāsadala reizinātājos tā, lai katrs no reizinātājiem būtu pirmskaitlis.
Piemēram, $36 = 2 \cdot 18$ nav skaitļa sadalījums pirmreizinātājos, jo skaitlis 18 nav pirmskaitlis.

Aritmētikas pamatteorēma
Katru naturālu skaitli $n > 1$ vienā vienīgā veidā var izteikt kā pirmskaitļu reizinājumu (reizinātāju secību neņem vērā).

Uzdevumu piemēri

1. Vai skaitli 203 var izteikt kā vismaz divu naturālu skaitļu summu tā, lai arī šo skaitļu reizinājums būtu 203?
Atrisinājums. Skaitlis 203 ir izsakāms kā $203 = 7 \cdot 29$, bet reizinātāju summa ir $7 + 29 = 36 < 203$. Tātad reizinājumam $7 \cdot 29$ vēl jāpiereizina vajadzīgais skaits vieninieku (reizinājums no tā nemainās). Ievērojam, ka $203 - 36 = 167$, tātad skaitli 203 atbilstoši uzdevuma prasībām varam izteikt šādi:

$$203 = 7 \cdot 29 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{\text{167 vieninieki}} \text{ un } 203 = 7 + 29 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{167 vieninieki}}.$$

2. Kāds ir mazākais skaitlis N, lai reizinājums $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot N$ dalītos ar 2013?
Atrisinājums. Mazākais iespējamais $N = 61$. Lai vairāku naturālu skaitļu reizinājums dalītos ar kādu naturālu skaitli A, starp reizinātājiem vismaz vienu reizi jābūt visiem skaitļa A pirmreizinātājiem vai skaitļiem, kas dalās ar skaitļa A pirmreizinātājiem.

Skaitļa 2013 sadalījums pirmreizinātājos ir $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Lai reizinājums $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot N$ dalītos ar 2013, tad N ir jābūt vismaz 61. Ja N būs mazāks nekā 61, tad neviens no reizinātājiem nedalīsies ar 61 (tas ir pirmskaitlis, tātad vairāku citu skaitļu reizinājums arī nevar būt 61), līdz ar to viss reizinājums nedalīsies ar 2013. Ja $N = 61$, tad reizinājums $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot ... \cdot 60 \cdot 61$ dalās ar 2013, jo $3 \cdot 11 \cdot 61 = 2013$ un doto reizinājumu varam pārrakstīt kā $2013 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12 \cdot ... \cdot 59 \cdot 60$, kas dalās ar 2013.

3. Cik starp pirmajiem 2014 naturālajiem skaitļiem ir tādu skaitļu x, ka skaitlis $x(x+1)(x+2)$ dalās ar 87?
Atrisinājums. Ievērojam, ka $87 = 29 \cdot 3$. Tā kā 29 ir pirmskaitlis, tad vienam no skaitļiem x, $x+1$ vai $x+2$ jādalās ar 29. Tā kā x, $x+1$ un $x+2$ ir trīs pēc kārtas esoši naturāli skaitļi, tad viens no tiem noteikti dalās ar 3, tāpēc dotais reizinājums vienmēr dalās ar 3.
No 1 līdz 2016 (2016 ir lielākā iespējamā $x+2$ vērtība) ir 69 skaitļi, kas dalās ar 29 (lielākais no tiem ir $2001 = 69 \cdot 29$). Līdz ar to:
- 69 veidos var izvēlēties tādu x, kas dalās ar 29;
- 69 veidos var izvēlēties tādu x, ka $x+1$ dalās ar 29;
- 69 veidos var izvēlēties tādu x, ka $x+2$ dalās ar 29.

Tātad pavisam ir $69 + 69 + 69 = 207$ tādi skaitļi x, ka $x(x+1)(x+2)$ dalās ar 87.

Tālāk dotie piemēri vairāk paredzēti 8.-9. klases skolēniem, bet tos var izmantot arī jaunāku klašu skolēni.

Apvienojot vienādos pirmskaitļus, jebkuru naturālo skaitli n, kas lielāks nekā 1, var uzrakstīt formā:
$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot ... \cdot p_m^{k_m},$$
kur $p_1, p_2, p_3, ..., p_m$ ir dažādi pirmskaitļi un $k_1, k_2, ..., k_m$ ir kaut kādi naturāli skaitļi.

Lai skaitlis būtu kāda naturāla skaitļa kvadrāts, tad katra tā pirmreizinātāja $p_1, p_2, p_3, ..., p_m$ kāpinātājam jābūt pāra skaitlim.

Piemēram, skaitlis $2^{10} \cdot 7^4 \cdot 13^{60}$ ir naturāla skaitļa kvadrāts, jo $2^{10} \cdot 7^4 \cdot 13^{60} = (2^5 \cdot 7^2 \cdot 13^{30})^2$.

Lai skaitlis būtu kāda naturāla skaitļa kubs, tad katra tā pirmreizinātāja $p_1, p_2, p_3, ..., p_m$ kāpinātājam jādalās ar 3.

Uzdevumu piemēri

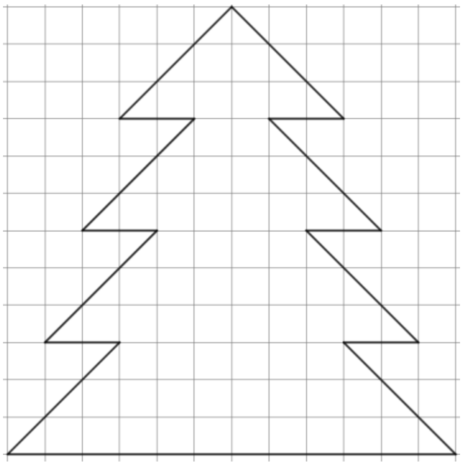
4. Katru naturālu skaitli vienā vienīgā veidā var sadalīt pirmskaitļu reizinājumā. Par skaitļa garumu sauksim tā pirmreizinātāju skaitu (piemēram, skaitļa $330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ garums ir 4, skaitļa $25 = 5 \cdot 5 = 5^2$ garums ir 2). Kāds lielākais garums var būt četrciparu skaitlim? Atrodi visus četrciparu skaitļus ar lielāko garumu!
Atrisinājums. Skaitlim $8192 = 2^{13}$ garums ir 13. Ja kādu no pirmreizinātājiem 2 aizstāsim ar 3 vai lielāku skaitli, reizinājums būs vismaz $2^{12} \cdot 3 = 12288$ – vismaz piecciparu skaitlis. Arī $2^{14} > 9999$. Tātad četrciparu skaitlim lielākais garums ir 13, un ir tikai viens tāds skaitlis, tas ir skaitlis 8192.

5. Ar kādu mazāko naturālo skaitli jāreizina skaitlis 315, lai reizinājumā iegūtu skaitli, kas ir **a)** kāda naturāla skaitļa kvadrāts, **b)** kāda naturāla skaitļa kubs?
Atrisinājums. Vispirms sadalām skaitli 315 pirmreizinātājos: $315 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.
a) Mazākais skaitlis ir 35. Ja skaitlis ir naturāla skaitļa kvadrāts, tad visi tajā ietilpstošie pirmreizinātāji sastopami pāra skaita reižu. Tātad skaitlis 315 vēl jāreizina vismaz ar vienu skaitli 5 un vismaz vienu skaitli 7; tātad mazākais skaitlis, ar kuru reizinot skaitli 315, iegūsim naturāla skaitļa kvadrātu, ir $5 \cdot 7 = 35$, un iegūtais reizinājums ir $11025 = 105 \cdot 105$.
b) Mazākais skaitlis ir 3675. Ja skaitlis ir naturāla skaitļa kubs, tad visi tajā ietilpstošie pirmreizinātāji sastopami 3, 6, 9, ... reizes. Tātad mazākais skaitlis, ar kuru reizinot 315, iegūsim šādu situāciju, ir $3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 3675$, un iegūtais reizinājums ir $1157625 = 105 \cdot 105 \cdot 105$.

6. Dots, ka x un y ir tādi naturāli skaitļi, ka $x \cdot y = 10^{12}$. Vai var būt, ka ne x, ne y savā pierakstā nesatur ciparu 0?
Atrisinājums. Pamatosim, ka tas nav iespējams.
Izmantojot pakāpju īpašības, iegūstam, ka $x \cdot y = 10^{12} = (2 \cdot 5)^{12} = 2^{12} \cdot 5^{12}$.
Skatāmies, kāds var būt x un y. Tā kā x un y reizinājums ir pakāpju reizinājumi, kur bāzes ir pirmskaitļi (tātad tos sīkāk pirmreizinātājos sadalīt nevar), tad gan x, gan y ir izsakāmi kā 2 un 5 pakāpju reizinājums.
Ja x vai y satur gan reizinātāju 2, gan reizinātāju 5, tad šis skaitlis dalās ar 10, tātad tas beidzas ar 0. Tātad šis gadījums neder.
Atliek, ka viens no skaitļiem ir 2^{12}, bet otrs ir 5^{12}. Bet $2^{12} = 4096$. Tātad arī šis gadījums neder.
Citu veidu, kā izvēlēties x un y, nav. Līdz ar to esam pamatojuši, ka nevar būt, ka neviens no skaitļiem nesatur ciparu 0.

Profesora Cipariņa klubs
2024./2025. mācību gads
4. kārtas uzdevumi

1. uzdevums
Sadali 1. att. figūru **a)** 7 trijstūros; **b)** 6 vienādās daļās!



1. att.

2. uzdevums
Kādā vakarā Guna trenējās reizināt trīs pēc kārtas esošus naturālus skaitļus, kas nepārsniedz 2025. Cik no iegūtajiem reizinājumiem dalās ar 111?

3. uzdevums
Rindā uzrakstīti 2025 skaitļi un pirmais skaitlis ir 18. Katru nākamo skaitli iegūst:

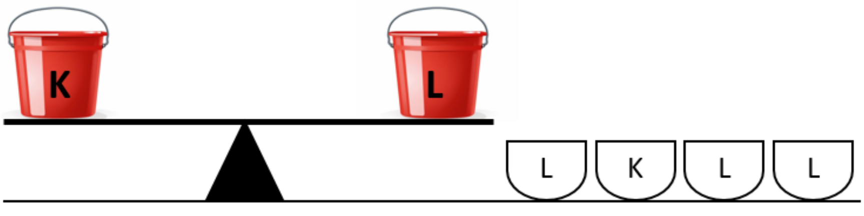
- iepriekšējo skaitli, ja tas ir pāra, dalot ar 2;
- iepriekšējo skaitli, ja tas ir nepāra, reizinot ar 5 un pieskaitot 3.

Kuri rindā uzrakstītie skaitļi sakrīt ar savu kārtas numuru (piemēram, rindas 3. skaitļa kārtas numurs ir 3)?

4. uzdevums
Uz sviras svariem bez atsvariem uzlikti divi spaiņi – labajā pusē spainis ar nosaukumu L, kreisajā pusē spainis ar nosaukumu K (skat. 2. att.). Šajos spaiņos tiek liktas lodītes. Svariem iespējami trīs novietojumi:

- ja spaiņos ir vienāds lodīšu skaits, tad tie atrodas līdzsvarā;
- ja spaiņos lodīšu skaits atšķiras tieši par 1, tad svari nav līdzsvarā, bet spaiņi joprojām atrodas uz svariem un neviena lodīte no tiem neizkrīt;
- ja spaiņos lodīšu skaits atšķiras par vismaz 2, tad spaiņi nokrīt un visas lodītes izkrīt no spaiņiem.

Blakus svariem ir vairākas bļodas, kurās ir vairākas lodītes. Ja bļodas nosaukums ir L, tad tajā atrodas lodītes ar nosaukumu L un tās tiek liktas spainī L. Ja bļodas nosaukums ir K, tad tajā atrodas lodītes ar nosaukumu K un tās tiek liktas spainī K.



2. att.

a) Pie svariem ir noliktas 6 bļodas kaut kādā secībā. No katras bļodas pēc kārtas (sākot no kreisās puses) tiek paņemta viena lodītes un ielikta attiecīgajā spainī. Kādas ir visas iespējamās bļodu secības, lai spaiņi no svariem nenokristu (piemēram, 2. att. bļodu secība ir LKLL)?

b) Pie svariem noliktas 6 bļodas kaut kādā secībā. Līdzīgi a) gadījumam, no katras bļodas pēc kārtas (sākot no kreisās puses) tiek paņemta viena lodīte un ielikta attiecīgajā spainī un spaiņi nevienā brīdī nenokrīt. Pēc tam spaiņi tiek iztukšoti un no katras otrās bļodas (tas ir, no 2., 4. un 6. bļodas) tiek paņemta viena lodīte un ielikta attiecīgajā spainī, atkal spaiņi nevienā brīdī nenokrīt. Pēc tam spaiņi tiek atkal iztukšoti un no katras trešās bļodas (tas ir, no 3. un 6. bļodas) tiek paņemta viena lodīte un ielikta attiecīgajā spainī, atkal spaiņi nevienā brīdī nenokrīt. Kādas ir visas iespējamās bļodu secības, lai varētu veikt visas šīs darbības pēc kārtas, nemainot bļodu secību?

Ja lodītes tiek ņemtas no katras bļodas, katras otrās bļodas, katras trešās bļodas, utt., tad sauksim šādu procesu par attiecīgi *1-kārtu, 2-kārtu, 3-kārtu* un vispārīgā gadījumā par m*-kārtu.* Piemēram, b) gadījumā tika veikta *1-kārta, 2-kārta* un pēc tam *3-kārta*.

c) Pierādi, ka nav iespējams sakārtot 12 bļodas tādā secībā, lai spaiņi nenokristu, veicot jebkuru m*-kārtu*!

5. uzdevums

Vecmāmiņas dzimšanas dienas svinībās bija vairāki bērni. Svinību noslēdzošā daļa bija plānota ar svētku kēksiņiem, tomēr daži bērni pa vienam kēksiņam jau apēda agrāk bez atļaujas. Bērni savstarpēji zināja, kuri no viņiem ir ēduši kēksiņu. Lai sāktu risināt radušos situāciju, vecmāmiņa nostājās istabas vidū un viņai apkārt pa apli nostājās bērni. Vecmāmiņa katram bērnam prasīja pateikt par nākamo bērnu pa labi, vai viņš jau apēda kēksiņu. Vecmāmiņa zināja, ka bērni, kuri neēda kēksiņus, saka patiesību, bet bērni, kur apēda pa kēksiņam – mānās un saka pretējo. No iegūtajām atbildēm vecmāmiņa varēja nekļūdīgi noteikt tikai to, kāda daļa bērnu bija jau noēduši pa vienam kēksiņam. Kāda daļa tā bija?

Uzdevumi 8. un 9. klašu skolēniem

6. uzdevums

Vai skaitlis, kas sastāv no 2025 sešiniekiem un kādu skaitu nullēm, var būt naturāla skaitļa kvadrāts?

7. uzdevums

Kaspars un Rota pamīšus nokrāso kādu rūtiņu melnā krāsā kvadrātā ar izmēriem 4×4 rūtiņas. Zaudē tas, pēc kura gājiena tiek iegūts melns kvadrāts ar izmēriem 2×2 rūtiņas. Kurš spēlētājs – Kaspars vai Rota – vienmēr var uzvarēt, ja Kaspars sāk pirmais?