Mājas darbs uz izlases kandidātu vecākās grupas nodarbību 2019. gada 28. septembrī

Lai sekmīgi risinātu uzdevumus par polinomiem, ir jāiepazīstas ar polinomu algebras pamatjēdzieniem, rezultātiem, paņēmieniem. Daļu no tā māca skolā, taču, iespējams, vēlākā klasē nekā pašlaik mācāties, daļa skolas programmā nav iekļauta, taču savas elementārās dabas dēļ var izrādīties noderīga olimpiāžu uzdevumu risināšanā. Lai nodrošinātu aptuveni līdzīgu šo pamatzināšanu līmeni izlases kandidātu starpā, daļa no mājas darba ir saistīta ar patstāvīgu tehnisko pamatzināšanu apgūšanu — ja tās pašlaik nav apgūtas.

Uz šo reizi jāapgūst šādas zināšanas (tā kā angļu valodā tīmeklī atrodams daudz vairāk lasāmvielas par šīm tēmām, tad iekavās minēts tēmas angliskais nosaukums):

1) polinoms, tā pakāpe (polynomial, degree of a polynomial),

2) Hornera shēma jeb paņēmiens (Horner's method),

3) polinomu dalīšana ar atlikumu — algoritms (polynomial long division),

4) polinomu lielākais kopīgais dalītājs (greatest common divisor), Eiklīda algoritms polinomiem (Euclid's algorithm for polynomials), ieskaitot to, ko sniedz tā paplašinātā versija (extended Euclidean algorithm),

5) kompleksā skaitļa jēdziens un aritmētisko darbību izpildīšana kompleksajiem skaitļiem formā $a + bi$ (complex numbers); tālākas zināšanas pagaidām nav nepieciešamas.

Lai palīdzētu sagatavoties un pārbaudīt, vai pārzināt attiecīgās tēmas, šeit, zemāk ir atrodami vingrinājumi. Vingrinājumu atrisinājumi nav jāiesūta. Ja esat pārliecināti, ka attiecīgās tēmas labi pārzināt, varat nerisināt vingrinājumus un uzreiz pāriet pie uzdevumu risināšanas. Tikai pirmie divi no pieciem uzdevumiem ir tieši saistīti ar tēmu apguves pārbaudi.

Par tēmām, kuras jums nav pazīstamas, aicinu tīmeklī atrast jums piemērotāko avotu (angļu valodā atrodami dažādu sarežģītības līmeņu materiāli). Ticami, ka jums pietiks ar Vikipēdijā atrodamo. Šeit ir priekšlasījums par polinomiem latviski, kas satur lielu daļu no mūsu nodarbībās nepieciešamās vielas, tai skaitā no šim mājas darbam vajadzīgās: `https://prezi.com/q3ncgvbcai2z/n-tas-pakapes-polinoms-ar-vienu-mainigo/`. Varat, protams, izmantot arī jums pieejamās matemātikas grāmatas, ja starp tām ir šīm tēmām piemērotas.

Ja, apgūstot minētās tēmas vai risinot uzdevumus, rodas grūtības vai jautājumi, ar kuriem paši netiekat galā, lūdzu rakstīt e-vēstuli uz adresi "juris punkts smotrovs @ lu punkts lv" vai izrunāt neskaidrības pašas nodarbības laikā.

1 Vingrinājumi

1.1 Hornera shēma

Vienādību $x^5 - x^4 - 2x^2 + 3 = (x-2)^5 + 9 \cdot (x-2)^4 + 32 \cdot (x-2)^3 + 54 \cdot (x-2)^2 + 40 \cdot (x-2) + 11$ var iegūt ar sekojošās tabulas palīdzību.

	1	-1	0	-2	0	3
2	1	1	2	2	4	**11**
2	1	3	8	18	**40**	
2	1	5	18	**54**		
2	1	7	**32**			
2	1	**9**				
2	**1**					

Šādu paņēmienu polinoma $P(x)$ izvirzīšanai pēc $x - c$ pakāpēm sauc par Hornera shēmu.

1. Kāds ir šīs tabulas uzbūvēšanas algoritms?

2. Pamatot Hornera shēmu.

1.2 Eiklīda algoritms

3. Izdalīt polinomu $F(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ ar polinomu $G(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ ar atlikumu, tas ir, atrast tādus polinomus $Q(x)$ un $R(x)$, ka izpildās identitāte $F(x) = Q(x) \cdot G(x) + R(x)$ un $\deg R(x) < \deg G(x)$ vai $R(x)$ ir nulles polinoms (ar "deg" apzīmēta polinoma pakāpe).

4. (*Eiklīda algoritms.*) Dots: $F(x)$ un $G(x)$ ir polinomi, $G(x)$ nav nulles polinoms. Pierādīt, ka pastāv tāds vienvienīgs vesels nenegatīvs n un tādi vienvienīgi polinomi Q_1, Q_2, …, Q_{n+1}, R_1, R_2, …, R_n, ka (polinomu argumenti pieraksta vienkāršības labad izlaisti):

$$\begin{array}{rcl} F & = & Q_1G + R_1 \\ G & = & Q_2R_1 + R_2 \\ R_1 & = & Q_3r_2 + R_3 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ R_{n-2} & = & Q_nR_{n-1} + R_n \\ R_{n-1} & = & Q_{n+1}R_n \end{array}$$

un $\deg G > \deg R_1 > \deg R_2 > \ldots > \deg R_n$. Pierādīt, ka R_n ir polinomu F un G lielākais kopīgais dalītājs $\mathrm{LKD(F, G)}$.

5. Izmantojot Eiklīda algoritmu, atrast polinomu $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ un $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ lielāko kopīgo dalītāju.

6. Iepriekšējā uzdevuma polinomiem $F(x)$ un $G(x)$ atrast tādus polinomus $U(x)$ un $V(x)$, lai izpildītos identitāte

$$x + 1 = U(x)F(x) + V(x)G(x).$$

7. Dots: $F(x) = 3x^3-2x^2+x+2$, $G(x) = x^2-x+1$. Ar Eiklīda algoritma palīdzību atrast tādus polinomus $U(x)$ un $V(x)$, ka

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

8. Izmantojot iepriekšējā uzdevumā aprēķināto, atbrīvoties no iracionalitātes daļas

$$\frac{1}{3\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha + 2}$$

saucējā, kur α ir viena no polinoma $x^2 - x + 1$ kompleksajām saknēm. Tas ir, izteikt šo daļu formā $P(\alpha)/m$, kur $P(x)$ ir polinoms ar veseliem koeficientiem un m ir vesels skaitlis.

2 Risināmie un iesniedzamie mājas darba uzdevumi

Lūdzu uzrakstīt un iesniegt atrisinājumus (elektroniski pirms nodarbības vai uz papīra nodarbības sākumā), lai cik uzdevumus jums izdotos atrisināt (arī tad, ja tikai vienu).

1. Izmantojot Hornera shēmu, izvirzīt polinomu $x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - 3x + 7 + i$ pēc $x + i$ pakāpēm.

2. Atbrīvoties no irracionalitātes daļas $\alpha/(\alpha+1)$ saucējā, kur $\alpha^3-3\alpha+1 = 0$.

3. Polinoms $P(x)$ apmierina identitāti $P(x) = P(a-x)$, kur a ir kāds reāls skaitlis. Pierādīt, ka $P(x)$ var izteikt kā polinomu no $(x-a/2)^2$.

4. Skolēns vingrinās kvadrātvienādojumu risināšanā. Atrisinājis kārtējo kvadrātvienādojumu un pārliecinājies, ka tam ir divas reālas saknes, viņš sastāda jaunu kvadrātvienādojumu pēc šāda likuma: brīvais loceklis ir lielākā sakne, bet koeficients pie x ir mazākā sakne. Koeficients pie x^2 vienmēr ir 1. Pierādīt, ka šāds vingrinājums nevar turpināties bezgalīgi. Kāds ir lielākais iespējamais kvadrātvienādojumu skaits, kuru viņam var nākties atrisināt?

5. Uz tāfeles uzrakstīts polinoms

$$x^{10}+\star\, x^9+\star\, x^8+\star\, x^7+\star\, x^6+\star\, x^5+\star\, x^4+\star\, x^3+\star\, x^2+\star\, x+1.$$

Andris ar Baibu spēlē šādu spēli. Vispirms Andris aizstāj jebkuru no zvaigznītēm ar kādu reālu skaitli, tad Baiba aizstāj jebkuru no atlikušajām zvaigznītēm, tad atkal Andris aizvieto kādu no atlikušajām zvaigznītēm, un tā tālāk, līdz pēc 9 gājieniem vairs nav nevienas zvaigznītes. Ja iegūtajam polinomam nav reālu sakņu, tad Andris ir uzvarējis; ja tam ir kaut viena reāla sakne, tad uzvarējusi ir Baiba. Vai Baiba var panākt uzvaru, lai kā spēlētu Andris?