Matemātiskā indukcija

1. *Trepēm ir 15 pakāpieni. Cik dažādos veidos pa tām var uzkāpt, ja katrā solī var kāpt pa vienu vai pa diviem pakāpieniem?*

Matemātiskā indukcija ir metode ar ko pierādīt vispārīgus apgalvojumus. Lai pierādītu vispārīgu apgalvojumu: visiem naturāliem n izpildās $A(n)$ pierāda

1. indukcijas bāzi $A(1)$
2. induktīvo pāreju: ja izpildās $A(k)$, tad izpildās arī $A(k+1)$

Vairāk par matemātisko indukciju var atrast, piemēram, 1983. gada A. Andžāna un P. Zariņa grāmatā "Matemātiskās indukcijas metode un varbūtību teorijas elementi", kas elektroniskā veidā pieejama http://www.lanet.lv/info/matind/, vai arī daudz kur citur, tā ir populāra tēma.

2. *Pierādīt, ka* $n^2 + n$ *dalās ar 2.*

3. *Pierādīt, ka*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

4. *Pierādīt, ka* $n^3 + 5n$ *dalās ar 6.*

5. *Pierādīt, ka*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

6. *Plaknē novilktas* n *taisnes. Pierādīt, ka iegūtos apgabalus var izkrāsot divās krāsās tā, ka nekādi divi blakus apgabali nebūs nokrāsoti vienā krāsā.*

7. *Dotas* 3^n *pēc ārējā izskata vienādas monētas, no kurām viena ir viltota, tā ir vieglāka nekā pārējās. Pierādīt, ka ar* n *svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem var atrast viltoto monētu.*

8. *Pierādīt, ka skaitlis* $\underbrace{111\ldots1}_{3^n}$ *dalās ar* 3^n.

9. *Pierādīt, ka katru naturālu skaitli, kas nepārsniedz* $n!$, *var sadalīt ne vairāk kā* n *saskaitāmajos, kas visi ir* $n!$ *dalītāji.*

10. *Pierādīt, ka visiem reāliem* $-1 \le x \le 1$ *un naturāliem* n

$$(1+x)^n + (1-x)^n \le 2^n.$$

Patiesībā matemātiskās indukcijas shēmas ir daudz un dažādas. Pati vienkāršākā modifikācija, kas reizēm jāveic, ir bāzes maiņa (atkarībā no tā, kas jāpierāda), bāze ne vienmēr ir vieninieks.

11. *Pierādīt, ka visiem naturāliem* $n \ge 3$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}.$$

12. *Pierādīt, ka* $2^n > n^2$ *visiem naturāliem* $n > 4$.

13. *Pierādīt, ka* $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ *dalās ar 57 visiem naturāliem* n.

14. *Pilsētā dzīvo* $n \geq 4$ *pļāpas. Kādu dienu katrs no tiem uzzina kādu svarīgu jaunumu. Pierādīt, ka pietiek ar* $2n - 4$ *telefonsarunām, lai visi pļāpas uzzinātu visus jaunumus (katrā telefonsarunā abi pļāpas izstāsta viens otram visus sev zināmos jaunumus).*

15. *Pierādīt, ka katram naturālam* $n \geq 6$ *kvadrātu var sagriezt* n *kvadrātos.*

Mājas uzdevumi par Fibonači virkni

Fibonači virknē $\{F_n\}$ katrs nākamais skaitlis ir divu iepriekšējo summa:
$F_1 = F_2 = 1$ un $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ visiem naturāliem $n \geq 1$.

16. *Pierādīt, ka*

$$\begin{aligned}
F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} &= F_{2n} \\
F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} &= F_{2n+1} - 1 \\
F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots + F_{2n}F_{2n+1} &= F_{2n+1}^2 - 1 \\
F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n &= F_{n+2} - 1 \\
F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 &= F_nF_{n+1}
\end{aligned}$$