Ierobežotas un monotonas virknes un funkcijas

1. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu $2^x = 37 - x$.

2. Reālu skaitļu virknē $a_1 = 1$ un $a_n = \frac{1}{n} + \sqrt{a_{n-1}}$ visiem $n \geq 2$. Atrodiet vislielāko un vismazāko šīs virknes locekli.

3. Dota virkne $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{5}{3}$, kurai $x_0 = 1$ un $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ visiem $n \geq 0$. Atrodiet skaitli, kas ir lielāks par visiem šīs virknes locekļiem ar pāra indeksu, bet mazāks par visiem ar nepāra.

4. Dota virkne, kurai $a_1 = 1$ un $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ visiem $n \geq 1$. Vai šī virkne ir ierobežota?

5. Naturālu skaitļu virknē

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} \text{ , } ja\ a_n\ ir\ p\bar{a}ra \\ a_n^2 - 5 \text{ , } ja\ a_n\ ir\ nep\bar{a}ra \end{cases} .$$

Pierādīt, ka, ja a_0 ir nepāra skaitlis, kas ir lielāks par 5, tad šī virkne nav ierobežota.

6. Vai ir ierobežotas virknes:

1. $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$
2. $b_n = \sqrt[n]{n}$
3. $c_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$
4. $d_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$
5. $e_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$
6. $*f_n = \frac{1}{1^{1.5}} + \frac{1}{2^{1.5}} + \frac{1}{3^{1.5}} + \cdots + \frac{1}{n^{1.5}}$
7. $g_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$
8. $h_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$?

7. No virknes $h_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ katra locekļa izsvītroja visus saskaitāmos, kas satur ciparu 9. Vai atlikusī virkne ir ierobežota?

8. Vai eksistē funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kura apmierina visus trīs nosacījumus

1. Eksistē tāds M, ka $-M < f(x) < M$ visiem $x \in \mathbb{R}$,
2. $f(1) = 1$,
3. $f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)^2$?

9. Funkcijai $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ visiem $x, y \in \mathbb{Z}$ izpildās

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)).$$

Pierādīt, ka f ir ierobežota.

10. Par funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zināms, ka $|f(x)| \leq 1$ visiem $x \in \mathbb{R}$ un visiem $x, y \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$f\left(x + \frac{13}{42}\right) + f(x) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) + f\left(x + \frac{1}{7}\right).$$

Pierādīt, ka f ir periodiska.

11. Dota virkne, kurai $a_1 = 1$ un $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}$ visiem $n \geq 1$. Vai šī virkne ir ierobežota? Pierādīt, ka $a_{9000} > 30$.

12. Doti vairāki reāli skaitļi, no kuriem virkni $\{a_n\}$ veido šādi: a_1 ir to summa, a_2 ir to kvadrātu summa, a_3 ir to kubu summa utt. Vai var gadīties, ka virkne $\{a_n\}$ ir dilstoša līdz a_5 un tālāk augoša? Vai var gadīties otrādi?

13. Doti reāli pozitīvi skaitļi $a_{0,1}, a_{0,2}, \ldots, a_{0,2016}$. Katram $n \geq 0$ un $1 \leq k < 2016$ definēsim

$$a_{n+1,k} = a_{n,k} + \frac{1}{2a_{n,k+1}} \quad \text{un} \quad a_{n+1,2016} = a_{n,2016} + \frac{1}{2a_{n,1}}.$$

Pierādīt, ka $\max\limits_{1 \leq k \leq 2016} a_{2016,k} > 44$.