

Indukcija - Uzdevumi

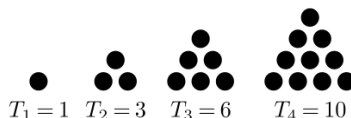
1. [Sienāziša indukcija] Nemirstīgs sienāzītis sēž uz bezgalīgu kāpņu pirmā pakāpiena. Sienāzītis ir spējīgs uzņemt visuma enerģiju ar ātrumu, kas ļauj viņam reizi minūtē pārlēkt no viena pakāpiena uz nākamo.

Pierādiet, ka sienāzītis spēs sasniegt savu mīļāko zvaigzni, lai cik tālu tā arī neatrastos!

2. [Kāpurīņa indukcija] Bezgalīgi garš kāpurs ir pierāpojis pie bezgalīgajām kāpnēm uz pamanījies uzslīdēt galvu un priekškājas(?) uz pirmajiem diviem pakāpieniem. Zināms, ka, ja kāpurs atbalstās uz pirmajiem k pakāpieniem, tad viņš var uzspiest sevi arī uz $k + 1$. pakāpiena.

Pierādiet, ka arī kāpurs var sasniegt sienāziša mīļāko zvaigzni!

3. [Trīsstūrīni skaitļi] Skaitli T sauc par *trīsstūrīnu*, ja T punktus var izkārtot vienādmalu trīsstūra piramīdā tā, ka katrā līmenī ir par vienu punktu vairāk, nekā iepriekšējā. Pirmie trīsstūrveida skaitļi ir:



Attēls 1: Pirmie trīsstūrveida skaitļi

Pierādiet, ka $T_n = \frac{n(n+1)}{2}!$

4. [Slapja padarīšana] Uz galda stāv 128 vienādas glāzes, bet katrā ir ieliets dažāds daudzums ūdens. Pēterītis prot paņemt jebkuras divas glāzes un liet no vienas otrā, kamēr ūdens daudzums abās ir vienāds.

Pierādiet, ka Pēterītis var panākt, ka visās glāzēs uz galda ir vienāds ūdens daudzums!

5. [Pilna Vienvirziena zeme] Vienvirziena zemē katra pilsēta ir savienota ar katru citu ar vienu vienvirziena ceļu.

Pierādiet, ka Vienvirziena zemē ir pilsēta no kuras var nonākt jebkurā citā pilsētā!

6. [Daļēja Vienvirziena zeme] Šajā Vienvirziena zemē tikai dažas pilsētas ir savienotas ar kādām citām ar vienvirziena ceļu (un nav pilnībā nesavienotu daļu). Tapat ir zināms, ka, katrai pilsētai ceļu skaits, kas iziet no tās, ir vienāds ar ceļu skaitu, kas tajā ieiet.

Pierādiet, ka šajā Vienvirziena zemē no katras pilsētas ir iespējams nonākt katrā citā!

7. [Atkal Pilna Vienvirziena zeme] Mēs atkal esam Pilnā Vienvirziena zemē, kurā katra pilsēta ir savienota ar katru (ar vienvirziena ceļu).

Pierādiet, ka, ja šajā zemē ir vismaz 3 pilsētas, tad ir iespējams nomainīt maksimums viena ceļa virzienu tā, ka pēc tam būs iespējams no katras pilsētas nonākt jebkurā citā!

8. [Kvadrāta pārklāšana ar stūrīšiem] Kāds no 128×128 rūtiņu kvadrāta ir izgriezis vienu rūtiņu.

Pierādiet, ka atlikušo kvadrāta daļu var noklāt ar "stūrīšiem"!



Attēls 2: Stūrītis

9. [Lapsiņas problēma] 100 trusīšu mežā atrada mellenes. Jaunākais trusītis salasīja 1 melleni, otrs jaunākais - 2 mellenes, trešais - 4 mellenes un tā tālāk līdz vecākais salasīja 2^{99} mellenes. Pienāca lapsiņa un piedāvājās palīdzēt pārdalīt ogas godīgāk - viņa atkārtoti izvēlēsies divus trusīšus un sadalīs viņu kopīgo ogu skaitu starp viņiem līdzīgi, pati apēdot lieko ogu (ja kopskaits ir nepāra) kā samaksu par darbu.

Kāds ir lielākais skaits melleņu, ko lapsiņa var apēst ar šādiem noteikumiem?