

Mājasdarbs skaitļu teorijā senioriem uz 07.12.2019.

Risinājumi jāiesniedz rakstiski pirms nodarbības vai nodarbības laikā.

Uzdevumi paštreiņam:

1. Atrodiet visus n , tādus, ka $n^4 + n^2 + 1$ ir pirmskaitlis.
2. Pierādiet: ja $p > 3$ ir pirmskaitlis, tad $p^2 - 1$ dalās ar 24.
3. Atrodiet visus pirmskaitļus p , kuriem skaitlis $14p^2 + 1$ arī ir pirmskaitlis.
4. Atrodiet visus naturālus n , tādus, ka abi skaitļi $2^n - 1$ un $2^n + 1$ ir pirmskaitļi.
5. Pierādiet: ja $2^q - 1$ ir pirmskaitlis, tad q arī ir pirmskaitlis.
6. Pierādiet: ja $2^m + 1$ ir pirmskaitlis, tad m ir divnieka pakāpe.
7. Apzīmējam skaitļa n dalītāju skaitu ar $\tau(n)$. Atrodiet visus naturālus n , kuriem var atrast tādu pirmskaitli p , ka $n = p \cdot \tau(n)$.

Iesniedzami uzdevumi:

1. Atrast visas galīgas punktu kopas P , kurās visi punkti ir vienā plaknē, nekādi 3 no tiem nav kolineāri, ar īpašību: jebkuriem trim kopas P punktiem A, B, C var atrast ceturto punktu $D \in P$, tādu, ka četrstūris $ABCD$ ir paralelogrāms.
2. Atrodiet izteiksmes $\sqrt{x^2 - 4x + 53} + \sqrt{x^2 - 14x + 74}$ mazāko iespējamo vērtību.
3. Dota naturālu skaitļu virkne a_n , kura tiek definēta šādi $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, un visiem naturāliem n izpildās $a_{n+2} = a_{n+1} \cdot a_n + a_{n+1} + a_n$. Pierādiet, ka
 - a) a_{2019} dalās ar 5,
 - b) a_{2019} nedalās ar 25.
4. Atrisīniet reālos skaitļos vienādojumu sistēmu:
$$\begin{cases} x - y = y^3 - z^3 \\ y - z = z^3 - x^3 \\ z - x = x^3 - y^3 \end{cases}$$
5. Veselu skaitļu kopu A saucim par *skaišto*, ja jebkuriem diviem (ne obligāti dažādiem) kopas A elementiem x, y un jebkuram veselam k skaitlis $z = x^2 + kxy + y^2$ arī pieder kopai A . Atrast visus nenulles veselu skaitļu pārus (m, n) , tādus, ka jebkura *skaištā* kopa, kas satur skaitļus m un n , sakrīt ar visu veselu skaitļu kopu \mathbb{Z} .