

## Mājasdarbs skaitļu teorijā senioriem uz 15.02.2020.

Šoreiz ir trīs uzdevumu komplekti uz dažādām tēmām; katrā no komplektiem ir 4 uzdevumi, katru vertē ar 2,5 punktiem:

1. uzdevumu komplekts (zaļš) – kongruences un kāpinātāja pacelšanas lemna;
2. uzdevumu komplekts (dzeltens) – vienādojumi veselos un naturālos skaitļos;
3. uzdevumu komplekts (oranžs) – algebra + ģeometrija + kombinatorika + skaitļu teorija.

### Svarīgi!

- Var risināt vairāk par 4 uzdevumiem, jo papildus savāktie punkti piešķirs par nākamajām nodarbībām.
- Skolēniem, kas piedalījas vai plāno piedalīties BW, EGMO, IMO, vēlāms iesniegt risinājumus tieši 3. komplektam. Šie skolēni var arī risināt uzdevumus vai apakšuzdevumus, kas apzīmēti ar 3 zvaigznītēm, kas skaitās grūtāki (\*\*\*)
- Atrisinājumi jāraksta uz papīra, un tos var iesniegt nodarbību laikā, bet
- atrisinājumus var arī nobildēt un atsūtīt man uz e-pastu jebkurā laikā (piem., [artem.u00@mail.ru](mailto:artem.u00@mail.ru)).

Vēlu veiksmi uzdevumu risināšanā!

### 1. uzdevumu komplekts: kongruences un kāpinātāja pacelšanas lemna

#### 1. uzdevums

- a) Zināms, ka 2019 naturālu skaitļu kvadrātu summa nedalās ar 3. Pierādiet, ka to reizinājums dalās ar 3.
- b) Zināms, ka 2020 naturālu skaitļu simto pakāpju summa nedalās ar 101. Pierādiet, ka to reizinājums dalās ar 101.

#### 2. uzdevums

- a) Dots, ka  $a, b, c$  ir naturāli, un skaitlis  $a^3 + b^3 + c^3$  dalās ar 9. Pierādiet, ka skaitlis  $abc$  dalās ar 3.
- b) Dots, ka  $a, b, c, d$  ir naturāli, un skaitlis  $a^6 + b^6 + c^6 + d^6$  dalās ar 63. Pierādiet, ka skaitlis  $a + b + c + d$  dalās ar 21.

#### 3. uzdevums

- a) Dots, ka  $m, n$  ir naturāli, un skaitlis  $m - n$  dalās ar 22. Vai var gadīties, ka skaitlis  $m^{424} - n^{424}$  dalās ar 242?
- b) Dots, ka  $m, n$  ir naturāli, un skaitlis  $(m^7 + n^7)(m + n)$  nedalās ar 343. Vai var gadīties, ka skaitlis  $m + n$  dalās ar 7?

#### 4. uzdevums

Alise un Beatrise spēlē sekojošu spēli. Alise uzraksta uz tāfeles trīs naturālus skaitļus  $x, y, z$ . Beatrise izvēlas divus no tiem (teiksim,  $u$  un  $v$ ), nodzēš šos divus skaitļus un to vietā uzraksta jaunus divus skaitļus:

$$\frac{u^5 + v^5}{u + v}, \frac{u^5 - v^5}{u - v}.$$

Pēc tam to pašu operāciju veic Alise, pēc tam atkal Beatrise, un tā tālāk. Pierādiet, ka (neatkarīgi no Alises stratēģijas)

- a) pēc sava pirmā gājiena Beatrise vienmēr var panākt, ka visu trīs skaitļu reizinājums dalās ar 5;
- b) \*\*\* pēc sava trešā gājiena Beatrise vienmēr var panākt, ka visu trīs skaitļu reizinājums dalās ar 25.

### 2. uzdevumu komplekts: vienādojumi veselos un naturālos skaitļos

#### 1. uzdevums

Dots vienādojums  $2x^2 + x = 3y^2 + y$ . Pierādiet, ka

- a) skaitlis  $x - y$  ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts;
- b) skaitlis  $2x + 2y + 1$  ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts;
- c) \*\*\* šim vienādojumam eksistē bezgalīgi daudz atrisinājumu veselos skaitļos.

#### 2. uzdevums

- a) Vai vienādojumam  $a^3 + b^3 + c^3 = 5abc$  eksistē atrisinājums naturālos skaitļos?
- b) Vai vienādojumam  $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 7abcd$  eksistē atrisinājums naturālos skaitļos?

#### 3. uzdevums

- a) Veselos skaitļos atrisiniet vienādojumu  $2x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = z^2$ .
- b) Veselos skaitļos atrisiniet vienādojumu  $x^2 + xy + y^2 = z^2$ .

#### 4. uzdevums

Pierādiet, ka vienādojumam  $(k - 1)^4 + k^4 + (k + 1)^4 = n^2 + (n + 1)^2$  nav atrisinājumu naturālos skaitļos.

### 3. uzdevumu komplekts: algebra + ģeometrija + kombinatorika + skaitļu teorija

#### 1. uzdevums

Atrisiniet vienādojumu  $|\sin x - \sin y| + \sin x \cdot \sin y = 0$ .

#### 2. uzdevums

Kādiem naturāliem  $n$  var atrast tādus naturālus  $a$  un  $b$ , ka  $n! = 2^a + 2^b$ ?

#### 3. uzdevums

Kāds ir mazākais rūtiņu skaits, kuras ir jāatzīmē  $8 \times 9$  rūtiņu tabulā, lai starp jebkurām piecām pēc kārtas ņemtām rūtiņām (rindā, kolonnā vai pa  $45^\circ$  diagonāli) būtu vismaz viena atzīmēta rūtiņa?

#### 4. uzdevums

\*\*\* Trijstūrī  $ABC$  apvilktas riņķa līnijas centrs ir  $O$ , ievilkta riņķa līnijas centrs ir  $I$ , savukārt punkts  $D$  ir punkta  $I$  simetrisks attēlojums pret punktu  $O$ . Pierādiet, ka  $AD^2 = 4AO^2 - AB \cdot AC$ .