

Mājās uz 2020.02.08 uzdevumi 1.6, 2.4, 4, 6.3.

Funkcionālvienādojumi

Funkcionālvienādojumi ir vienādojumi, kuros nezināmais ir funkcija. Galvenā to risināšanas metode ir ievietošanas metode: ievietot mainīgo vietās konkrētus skaitļus $(0, 1, 2, -1, \dots)$, vai kādas izteiksmes (y vietā x , x vietā $f(x)$), lai iegūtu kādas vienkāršas sakarības. Tālāk palīdzēs šo sakarību kombinēšana un brīžiem matemātiskā indukcija.

1. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kurām visiem $x, y \in \mathbb{R}$ ir spēkā:

1. $f(xy) = xf(x) + yf(y)$
2. $f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2$
3. $f(x+y) + f(x-y) - (y+2)f(x) + y(x^2 - 2y) = 0$
4. $f(x+y) + 2f(x-y) + f(x) + 2f(y) = 4x + y$
5. $f(x)f(x+y) = f(y)^2 f(x-y)^2 e^{y+4}$
6. $f(x+y) + f(x-y) = f(3x)$

2. Atrast visas funkcijas

1. $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $1 + f(0) + f(1) + \dots + f(n-1) = f(n)$
2. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$
3. $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$
4. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{ja } n > 100 \\ f(f(n+11)) & \text{ja } n \leq 100 \end{cases}$
5. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$ (vieglāks variants, ja papildus zināms, ka $f(1) = 2$)
6. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x)^2 + f(x)f(y) = x^2 + xy$

3. Par kādu algebrisku operāciju $x \star y$ zināms, ka visiem x, y, z izpildās $x \star (y \star z) = (x \star y) + z$ un $x \star x = 0$. Aprēķināt $1993 \star 1995$.

4. Funkcijai $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ visiem reāliem x izpildās $f(f(x)) = x^2 - x + 1$. Aprēķiniet $f(0)$.

5. Augošas skaitļu virknes a_1, a_2, \dots locekļi ir naturāli skaitļi. Zināms, ka $a_1 = 2$ un ka $a_{a_k} = 2k + 1$ visiem k . Aprēķināt a_2, a_{31}, a_{40} .

6. Atrast visas funkcijas

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\frac{1}{x}f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$
2. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $2f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = 3 + \frac{5x-1}{x^2+1}$
3. $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$,
4. $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, dots reāls skaitlis α , $\alpha x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{x+1}$