

# Mājasdarbs senioru grupai uz 28.03.2020.

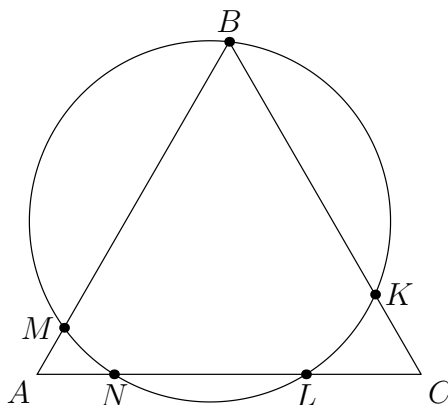
Norādījumi: risinājumus sūtīt uz [jevgenijs.vihrovs@lu.lv](mailto:jevgenijs.vihrovs@lu.lv) līdz 03.04. 00:00 (papildus laiks, jo šis mājasdarbs tiek publicēts vēlu). Pat ja uzdevums netiek atrisināts pilnībā, pierakstīt iegūtos rezultātus. Katrs uzdevums tiek vērtēts līdz 7 punktiem (bet kopējais rezultāts tiek vēlāk normēts uz 10, tad galā par katru uzdevumu var nopelnīt līdz 1.25 punktiem). Pēc 03.04. tiks sniegti arī risinājumi.

## Iesildīšanas uzdevumi ģeometrijā

**1. uzdevums.** Rombā  $ABCD$  zināms, ka  $\angle BAD = 60^\circ$ . Par paralelogramu  $DXYZ$  zināms, ka  $X$  pieder malai  $AD$ ,  $Z$  — malai  $CD$  un  $Y$  — diagonālei  $AC$ . Pierādīt, ka trijstūris  $BXZ$  ir regulārs.

**2. uzdevums.** Riņķa līnijā ievilkts kvadrāts  $ABCD$ . Punkts  $M$  atrodas uz mazākā no lokiem  $CD$  un nesakrīt ne ar  $C$ , ne ar  $D$ . Taisne  $AM$  krusto taisnes  $BD$  un  $CD$  attiecīgi punktos  $P$  un  $R$ . Taisne  $BM$  krusto taisnes  $AC$  un  $DC$  attiecīgi punktos  $Q$  un  $S$ . Pierādīt, ka  $PS \perp QR$ .

**3. uzdevums.** Riņķa līnija iet caur regulāra trijstūra  $ABC$  virsotni  $B$  un krusto tā malas, kā parādīts zīm. Pierādīt, ka  $AM + CL = AN + CK$ .



**4. uzdevums.** Trijstūra  $ABC$  ievilkta riņķa centrs ir  $I$ . Dots, ka  $CA + AI = CB$ . Pierādīt, ka  $\angle BAC = 2\angle CBA$ .

## Pamatdaļas uzdevumi

**5. uzdevums.**  $P(x)$  ir kvadrātisks polinoms ar divām dažādām reālām saknēm. Zināms, ka visiem reāliem skaitļiem  $a$  un  $b$ , kuriem spēkā  $|a|, |b| \geq 2017$ , izpildās  $P(a^2 + b^2) \geq P(2ab)$ . Pierādīt, ka vismaz viena no  $P$  saknēm ir negatīva.

**6. uzdevums.** Ar  $S_n$  apzīmēsim kopu  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Noteikt visus naturālus  $n$  tādus, kuriem eksistē funkcijas  $f : S_n \rightarrow S_n$  un  $g : S_n \rightarrow S_n$ , ka katram  $x$  izpildās tieši viena no vienādībām  $f(g(x)) = x$  un  $g(f(x)) = x$ .

**7. uzdevums.** Skaitlis  $n$  ir naturāls. Noteikt vislielāko vērtību izteiksmei  $\gcd(a,b) + \gcd(b,c) + \gcd(c,a)$ , ja  $a, b, c$  ir naturāli skaitļi tādi, ka  $a + b + c = 5n$ .

**8. uzdevums.** Dots trijstūris  $ABC$ . Uz malas  $AC$  izvēlēti punkti  $D$  un  $E$  tādi, ka punktu secība uz šīs taisnes ir  $A, E, D, C$ . Taisne, kas iet caur  $E$  un ir paralēla  $BC$ , krusto  $\triangle ABD$  apvilktu riņķa līniju punktā  $F$ , pie tam  $E$  un  $F$  atrodas dažādās pusēs no  $AB$ . Taisne, kas iet caur  $E$  un ir paralēla  $AB$ , krusto  $\triangle BCD$  apvilktu riņķa līniju punktā  $G$ , pie tam  $E$  un  $G$  atrodas dažādās pusēs no  $BC$ . Pierādīt, ka ap punktiem  $D, E, F, G$  var apvilkt riņķa līniju.