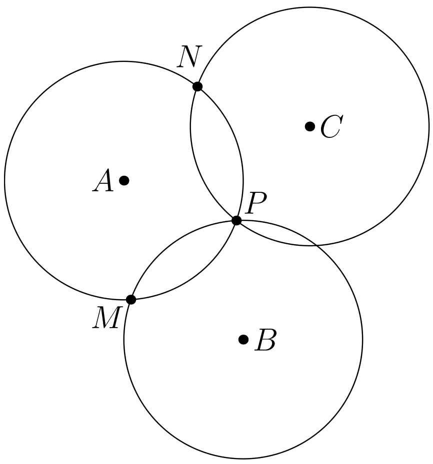
Mājasdarbs senioru grupai uz 13.04.2020.

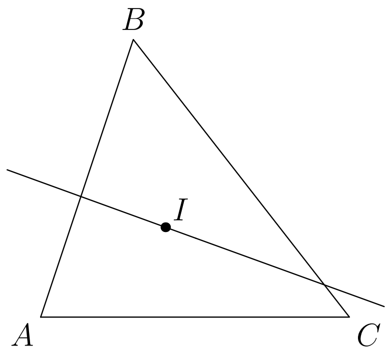
Norādījumi: risinājumus sūtīt uz jevgenijs.vihrovs@lu.lv līdz 13.04. 00:00 (papildus laiks, jo šis mājasdarbs tiek publicēts vēlu). Pat ja uzdevums netiek atrisināts pilnībā, pierakstīt iegūtos rezultātus. Katrs uzdevums tiek vērtēts līdz 7 punktiem (bet kopējais rezultāts tiek vēlāk normēts uz 10, tad galā par katru uzdevumu var nopelnīt līdz 1.25 punktiem). Pēc 13.04. tiks sniegti arī risinājumi.

Iesildīšanas uzdevumi ģeometrijā

1. uzdevums. Trīs vienādas riņķa līnijas krustojas punktā P. Apzīmējam riņķa līniju centrus un divus no pārējiem krustpunktiem, kā parādīts zīm. Pierādīt, ka $MNCB$ ir paralelograms.



2. uzdevums. Caur trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas centru I novilkta taisne t tā, kā parādīts zīm. Tā dala trijstūra laukumu uz pusēm. Pierādīt, ka tā dala uz pusēm arī trijstūra perimetru.



3. uzdevums. Uz taisnes t atlikti punkti A_1, A_2, A_3, A_4 (tieši šādā secībā); punkts B nepieder taisnei t. Ar R_{ij} apzīmēsim tās riņķa līnijas rādiusu, kas apvilkta ap trijstūri BA_iA_j ($i \neq j$; $1 \leq i, j \leq 4$). Pierādīt, ka

$$R_{12} \cdot R_{34} = R_{13} \cdot R_{24}.$$

4. uzdevums. Dots, ka ABC ir šaurleņķu trijstūris, $AB > AC$ un $\angle BAC = 60°$. Apvilktās riņķa līnijas centrs ir O, bet augstumu krustpunkts ir H. Taisne OH krusto malas AB un AC attiecīgi punktos P un Q. Pierādīt, ka $PO = HQ$.

Pamatdaļas uzdevumi

5. uzdevums. Zināms, ka ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju. To diagonāles krustojas punktā E. Taisne, kas iet caur E un nesakrīt ne ar AC, ne ar BD, krusto AB punktā P un BC punktā Q. Riņķa līnija, kas pieskaras PQ punktā E un iet caur D, krusto ap $ABCD$ apvilkto riņķa līniju vēl punktā R. Pierādīt, ka B, P, R un Q atrodas uz vienas riņķa līnijas.

6. uzdevums. Dots naturāls skaitlis n. Pierādīt, ka $n^2 + n + 1$ nevar izteikt kā divu naturālu skaitļu reizinājumu, kuru starpība ir mazāka par $2\sqrt{n}$.

7. uzdevums. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, kas apmierina šādus nosacījumus:

(i) visiem veseliem skaitļiem x ir spēkā $f(f(x)) = x$;

(ii) visiem veseliem x un y, kuriem $x + y$ ir nepāra, ir spēkā $f(x) + f(y) \geq x + y$.

8. uzdevums. Matemātikas olimpiādē piedalījās 300 skolēni. Vēlāk daži no dalībniekiem spēlēja šahu. Katri divi dalībnieki nospēlēja ne vairāk par vienu spēli savā starpā. Nav arī tādu trīs dalībnieku, ka katrs no tiem ir spēlējis pret abiem citiem. Noteikt vislielāko iespējamo n vērtību tādu, ka katrs dalībnieks nospēlēja ne vairāk kā n spēles, un katram m no 1 līdz n ir tāds dalībnieks, kurš nospēlēja tieši m spēles.