

Senioru IMO treniņš 4

Šis ir neobligātais treniņš senioru nodarbību dalībniekiem (piedalīties var jebkurš interesēts). Katras divas nedēļas (svētdien) tiks publicēta šāda izlase ar uzdevumiem, uzdevumu sarežģītība ir aptuveni IMO līmeņa uzdevumi vai mazliet vieglāk. Šoreiz ir 4 uzdevumi, pa 1 no katras nozares (ģeometrija, algebra, skaitļu teorija, kombinatorika). Risinājumus vai jautājumus sūtīt uz jevgenijs.vihrovs@lu.lv līdz (sestdienai) 20.06. 23:59. Katrs uzdevums tiek vērtēts līdz 7 punktiem. Rezultāti tiks publicēti NMS mājaslapā.

1. uzdevums. Dots naturāls skaitlis $n \geq 3$. Atrast mazāko iespējamo summas

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i} - x_i \right)$$

vērtību, kur x_1, \dots, x_n ir tādi pozitīvi reāli skaitļi, ka

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + n - 1} = 1.$$

Noteikt arī, pie kādiem x_1, \dots, x_n šī vērtība tiek sasniegta.

2. uzdevums. Noteikt lielāko naturālu skaitli n , kas apmierina šādus nosacījumus: katram 5×5 kvadrāta aizpildījumam ar skaitļiem no 1 līdz 25, kur visās rūtiņās ierakstīti atšķirīgi skaitļi, kāda 2×2 kvadrāta skaitļu summa ir vismaz n .

3. uzdevums. Dots trijstūris ABC , kas nav taisnleņķa. Tā augstumi ir AD , BE un CF , un H ir augstumu krustpunkts. Punkti E' un F' ir attiecīgi punktu E un F atspoguļojumi attiecībā pret taisni AD . Taisnes BF' un CE' krustojas punktā X , un taisnes BE' un CF' krustojas punktā Y . Pierādīt, ka taisnes AX , BC un HY krustojas vienā punktā.

4. uzdevums. Doti naturāli skaitļi x , y un z tādi, ka $xy - zt = x + y = z + t$. Vai ir iespējams, ka abi skaitļi xy un zt vienlaicīgi ir kādu naturālu skaitļu kvadrāti?