Senioru mājas uzdevumi 3

1. Dots naturāls n. Atrodiet mazāko k ar sekojošu īpašību: ja doti reāli skaitļi $a_1, \ldots, a_d$ kuriem $a_1 + a_2 + \cdots + a_d = n$ un $0 \leq a_i \leq 1$, kur $i = 1, 2, \ldots, d$, ir iespējams tos sadalīt k grupās (dažas no tām var būt tukšas) tā, ka katras grupas skaitļu summa nepārsniedz 1.

2. $n \geq 2$ lampas $L_1, \ldots, L_n$ ir sakārtotas rindā, un katra no tām ir vai nu *ieslēgta* vai *izslēgta*. Katru sekundi visas lampas vienlaicīgi nomaina savu stāvokli sekojošā veidā:

- ja lampa L_i un tās kaimiņi (pie $i = 1$ un $i = n$ lampai ir viens kaimiņš, citiem i - divi kaimiņi) ir vienādā stāvoklī, tad L_i izslēdzas;
- citos gadījumos L_i ieslēdzas.

Sākumā lampa L_1 ir ieslēgta, bet visas pārējās - izslēgtas.

a. Pierādiet, ka ir bezgalīgi daudz skaitļu n, kuriem kādā brīdī visas lampas ir izslēgtas.

b. Pierādiet, ka ir bezgalīgi daudz skaitļu n, kuriem nekad nepienāks brīdis, kad visas lampas ir izslēgtas.

3. Uz kādas planētas ir 2^N valstis ($N \geq 4$). Katrai valstij ir karogs N vienību platumā un vienu vienību augstumā, kurš sastāv no N rūtiņām 1×1, un katra rūtiņa ir vai nu zila vai dzeltena. Nevienām divām valstīm nav vienādu karogu.

Sauksim N karogu kopu par *diversificētu*, ja šos karogus var sakārtot $N \times N$ kvadrātā tā, ka visas N rūtiņas uz kvadrāta galvenās diagonāles ir vienādā krāsā. Atrodiet mazāko naturālo M tādu, ka starp jebkuriem dažādiem M karogiem, var atrast N karogus, kas veido diversificētu kopu.

4. Uz riņķa līnijas atzīmēti 2^{500} punkti, kuriem piekārtoti skaitļi $1, 2, \ldots, 2^{500}$ kaut kādā secībā. Pierādiet, ka iespējams izvēlēties 100 savstarpēji nekrustojošas hordas, kas savieno kādus no šiem punktiem tā, ka 100 summas no skaitļu pāra, kuri piekārtoti hordas galapunktiem, ir vienādas.