Tematu apguves secība matemātikas olimpiādēm

Matemātikas olimpiāžu uzdevumu sastādīšanā tiks izmantoti VISC mājas lapā publicētie mācību priekšmetu programmu paraugi (https://www.visc.gov.lv/lv/programmu-paraugi-vispareja-izglitiba) un tur piedāvātā tematu secība.

Olimpiādēs uzdevumi 2020./2021. mācību gadā 7. un 10. klasei tiks veidoti ņemot vērā "Skola 2030" izstrādāto mācību priekšmetu programmas paraugu, bet pārējām klasēm – pēc projekta "Dabaszinātnes un matemātika" izstrādātās mācību priekšmeta programmas paraugu (skat. tematu sadalījumu 1. pielikumā).

Vidusskolai 10.-12. klasei tematu secība tiks ņemta pēc integrētās programmas (Matemātika I un Matemātika II kopā no 10. klases), iespēju robežās ņemot vērā Matemātika I tematu secību. Olimpiādēs netiek plānots iekļaut šādas vidusskolas tēmas – robežas, atvasinājums, integrāļi, statistika, varbūtību teorija, kompleksie skaitļi.

Ģeometrijas uzdevumu risināšanai nepieciešamās zināšanas un svarīgākie fakti apkopoti 2. pielikumā.

Svarīgākās matemātikas olimpiāžu tēmas apkopotas 3. pielikumā.

Savus ieteikumus sūtiet uz nms@lu.lv

1. pielikums. Tematu secība

5. klase

Līdz Valsts matemātikas olimpiādes 2. posmam apgūtie temati											
Līdz Atklātajai matemātikas olimpiādei apgūtie temati											
5.1. Zināšanu līmeņa diagnostika, atkārtojums un tā padziļinājums	5.2. Ģeometrijas elementi	5.3. Matemātiskās darbības	5.4. Skaitļu dalāmība	5.5. Parastās daļas	5.6. Taisnstūra paralēlskaldnis	5.7. Procenti	5.8. Jaukti skaitļi	5.9. Naturālie skaitļi	5.10. Teksta uzdevumi	5.11. Decimāldaļas	5.12. Ceļā uz 6. klasi
20 stundas	*5 stundas*	*10 stundas*	*10 stundas*	*25 stundas*	*6 stundas*	*8 stundas*	*15 stundas*	*15 stundas*	*16 stundas*	*15 stundas*	*15 stundas*

6. klase

Līdz Valsts matemātikas olimpiādes 2. posmam apgūtie temati									
Līdz Atklātajai matemātikas olimpiādei apgūtie temati									
6.1. Zināšanu līmeņa diagnostika un 5. klases matemātikas kursa atkārtojums	6.2. Saskaitīšana un atņemšana (daļējs atkārtojums)	6.3. Decimāldaļu reizināšana un dalīšana	6.4. Ģeometriskās figūras	6.5. Reizināšana un dalīšana ar daļu	6.6. Daļu un procentu rēķini	6.7. Proporcijas	6.8. Racionālie skaitļi	6.9. Darbības ar racionāliem skaitļiem	6.10. Ceļā uz 7. klasi
10 stundas	*10 stundas*	*15 stundas*	*12 stundas*	*20 stundas*	*22 stundas*	*10 stundas*	*12 stundas*	*32 stundas*	*22 stundas*

7. klase

Līdz Valsts matemātikas olimpiādes 2. posmam apgūtie temati								
Līdz Atklātajai matemātikas olimpiādei apgūtie temati								
7.1. Kā nosaka kopas visus elementus, aprēķina notikuma varbūtību?	7.2. Kā definē ģeometriskas figūras?	7.3. Kā raksturo sakarību starp mainīgiem lielumiem?	7.4. Kā pieraksta un pēta funkcijas, kuru grafiks ir taisne?	7.5. Kā raksturo trijstūri, izmantojot tā elementus?	7.6. Kādas ir sakarības starp lielumiem trijstūrī?	7.7. Ko nozīmē pārveidot izteiksmi ar mainīgo lielumu?	7.8. Kādi ir paņēmieni nezināmā noteikšanai?	7.9. Kā salīdzina izteiksmes, kurās ir mainīgais lielums?
15-19 stundas	*18-22 stundas*	*10-12 stundas*	*16-20 stundas*	*18-22 stundas*	*18-22 stundas*	*14-18 stundas*	*18-22 stundas*	*14-18 stundas*

8. klase

Līdz Valsts matemātikas olimpiādes 2. posmam apgūtie temati								
Līdz Atklātajai matemātikas olimpiādei apgūtie temati								
8.1. Polinomu sadalīšana reizinātājos	8.2. Ievads statistikā	8.3. Reālo skaitļu kopa	8.4. Laukumi un tilpumi	8.5. Virknes	8.6. Paralelograms	8.7. Trapece	8.8. Kvadrātvienādojumi	8.9. Pitagora teorēma
16 stundas	*14 stundas*	*20 stundas*	*20 stundas*	*10 stundas*	*23 stundas*	*18 stundas*	*26 stundas*	*14 stundas*

9. klase

Līdz Valsts matemātikas olimpiādes 2. posmam apgūtie temati							
Līdz Valsts matemātikas olimpiādes 3. posmam apgūtie temati							
Līdz Atklātajai matemātikas olimpiādei apgūtie temati							
9.1. Daļveida izteiksmes	9.2. Līdzīgi trijstūri	9.3. Trigonometriskās sakarības taisnleņķa trijstūrī	9.4. Kvadrātfunkcija	9.5. Leņķi un nogriežņi riņķī	9.6. Riņķa līnija un daudzstūri	9.7. Vienādojumu un nevienādību sistēmas	9.8. Pārskats par ģeometriskām figūrām un to elementiem
29 stundas	*12 stundas*	*14 stundas*	*23 stundas*	*17 stundas*	*16 stundas*	*24 stundas*	*24 stundas*

10. klase

Līdz Valsts matemātikas olimpiādes 2. posmam apgūtie temati							
Līdz Valsts matemātikas olimpiādes 3. posmam apgūtie temati							
Līdz Atklātajai matemātikas olimpiādei apgūtie temati							
10.1. Leņķa paplašinājums un trijstūra elementu aprēķināšana	10.2. Vektori	10.3. Koordinātu metode	10.4. Planimetrija	10.5. Kopas, matemātiskā indukcija, kombinatorika	10.6. Funkcijas īpašības	10.7. Algebriskās daļas, daļveida vienādojumi un nevienādības	10.8. Daļveida funkcija, funkcijas robeža
26 stundas	*26 stundas*	*24 stundas*	*24 stundas*	*32 stundas*	*24 stundas*	*36 stundas*	*16 stundas*

11. klase

Līdz Valsts matemātikas olimpiādes 2. posmam apgūtie temati							
Līdz Valsts matemātikas olimpiādes 3. posmam apgūtie temati							
Līdz Atklātajai matemātikas olimpiādei apgūtie temati							
11.1. Algebriskas nevienādības	11.2. Ģeometriskie pārveidojumi	11.3. Statistikas elementi	11.4. Kombinatorikas elementi	11.5. Varbūtību teorijas elementi	11.6. Paralelitāte un perpendikularitāte telpā	11.7. Trigonometriskie vienādojumi un nevienādības	11.8. Prizma
18 stundas	*12 stundas*	*12 stundas*	*12 stundas*	*10 stundas*	*22 stundas*	*26 stundas*	*16 stundas*

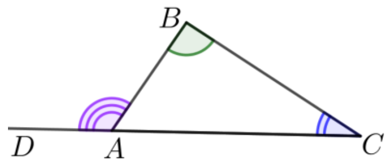
12. klase

Līdz Valsts matemātikas olimpiādes 2. posmam apgūtie temati							
Līdz Valsts matemātikas olimpiādes 3. posmam apgūtie temati							
Līdz Atklātajai matemātikas olimpiādei apgūtie temati							
12.1. Eksponentvienādojumi un nevienādības	12.2. Logaritmiskie vienādojumi un nevienādības	12.3. Piramīdas	12.4. Rotācijas ķermeņi	12.5. Funkcijas	12.6. Vienādojumi un nevienādības, to sistēmas	12.7. Ģeometrisko ķermeņu kombinācijas	12.8. Matemātika kā vērtība un matemātika kā līdzeklis
16 stundas	*16 stundas*	*16 stundas*	*18 stundas*	*16 stundas*	*24 stundas*	*14 stundas*	*6 stundas*

Nepieciešamās ģeometrijas zināšanas, ko apgūst vidusskolā, 10.-12. klasei Valsts matemātikas olimpiādes 2. un 3. posmam

Trijstūri

Par **trijstūra ārējo leņķi** sauc trijstūra iekšējā leņķa blakusleņķi.
Trijstūra ārējais leņķis ir vienāds ar to divu iekšējo leņķu summu, kas nav tā blakusleņķis, tas ir, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA$ (skat. 1. att.).



1. att.

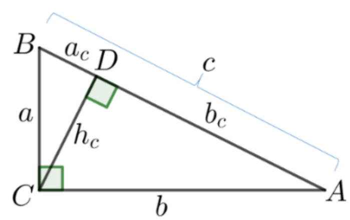
Trijstūra laukuma aprēķināšanas formulas:

$$S_\Delta = \frac{ah_a}{2} = pr = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

kur a, b, c – trijstūra malas, γ – leņķis starp malām a un b, h_a – augstums, kas vilkts pret malu a, p – trijstūra pusperimetrs, r – ievilktās riņķa līnijas rādiuss, R – apvilktās riņķa līnijas rādiuss.

Regulārs trijstūris. Ja regulāra trijstūra malas garums ir a, tad tā laukums $S_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, augstums $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, ievilktās riņķa līnijas rādiuss $r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, apvilktās riņķa līnijas rādiuss $R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

No taisnleņķa trijstūra taisnā leņķa virsotnes novilktais augstums h_c sadala trijstūri divos taisnleņķa trijstūros, kas ir līdzīgi savā starpā un ir līdzīgi dotajam trijstūrim, (skat. 2. att.).



2. att.

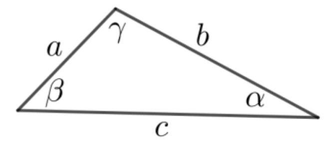
Eiklīda teorēma. Taisnleņķa trijstūra katete ir vidējais proporcionālais starp hipotenūzu un šīs katetes projekciju uz hipotenūzas. Taisnleņķa trijstūra augstums, kas novilkts no taisnā leņķa virsotnes, ir vidējais proporcionālais starp katešu projekcijām uz hipotenūzas. Ir spēkā šādas sakarības (skat. 2. att.):

$$h_c^2 = a_c \cdot b_c \qquad a^2 = a_c \cdot c \qquad b^2 = b_c \cdot c \qquad \frac{a^2}{b^2} = \frac{a_c}{b_c}$$

 Tapšanas procesā *Tapšanas procesā* *Tapšanas procesā* *Tapšanas procesā* *Tapšanas procesā* *Tapšanas procesā*

Sinusu teorēma. Trijstūra malas ir proporcionālas to pretleņķu sinusiem:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

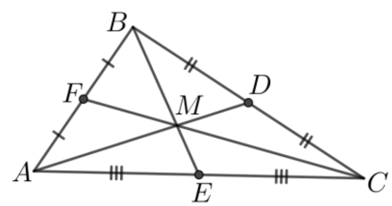


3. att.

Kosinusu teorēma. Trijstūra jebkuras malas kvadrāts ir vienāds ar abu pārējo malu kvadrātu summu, no kuras atņemts divkāršots šo malu reizinājums ar ietvertā leņķa kosinusu:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

Trijstūra mediānu īpašība. Trijstūra mediānas krustojas vienā punktā, un krustpunkts katru mediānu dala attiecībā $2:1$, skaitot no trijstūra virsotnes, tas ir, $\frac{AM}{MD}=\frac{BM}{ME}=\frac{CM}{MF}=\frac{2}{1}$, kur M ir mediānu krustpunkts (skat. 4. att.).



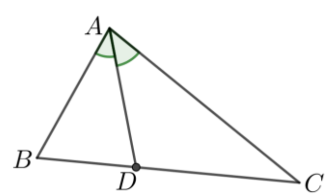
4. att.

Mediānas, kas vilkta pret malu b, garuma aprēķināšana:

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}.$$

Mediānas garuma aprēķināšanas formulu iegūst no sakarības starp paralelograma diagonālēm un malām $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$.

Trijstūra bisektrises īpašība. Trijstūra leņķa bisektrise sadala pretējo malu nogriežņos, kuru attiecība ir vienāda ar šim leņķim atbilstošo piemalu attiecību, tas ir, $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ (skat. 5. att.).



5. att.

Bisektrises garuma aprēķināšana. Trijstūra bisektrises garuma kvadrāts ir vienāds ar divu malu garumu reizinājumu, no kura atņemts to trešās malas nogriežņu reizinājums, kuros dotā bisektrise sadala trešo malu:

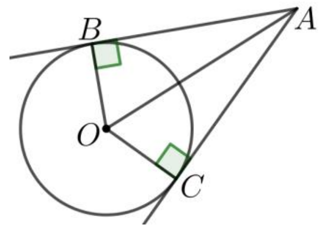
$$AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot DC.$$

Metriskās sakarības riņķa līnijā

Definīcija. Par riņķa līnijas **pieskari** sauc taisni, kurai ar riņķa līniju ir tieši viens kopīgs punkts.

Caur jebkuru punktu A, kas atrodas ārpus riņķa līnijas, var novilkt tieši divas pieskares. Ja punkti B un C ir šo pieskaru pieskaršanās punkti un O – attiecīgās riņķa līnijas centrs (skat. 6. att.), tad

- $AB = AC$ (pieskaru nogriežņi, kas novilkti no viena punkta, ir vienādi);
- $\sphericalangle BAO = \sphericalangle CAO$;
- $OB \perp AB$ un $OC \perp AC$.



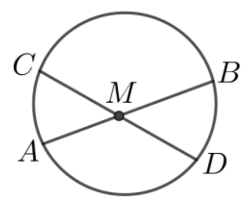
6. att.

Definīcija. Par **hordu** sauc nogriezni, kas savieno divus riņķa līnijas punktus.

Īpašības

- Vienā riņķī hordas, kas savelk vienādus lokus, ir vienādas, un otrādi.
- Loki starp vienas riņķa līnijas divām paralēlām hordām ir vienādi.

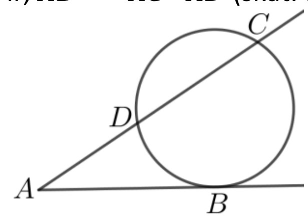
Teorēma par krustiskām hordām. Ja divas hordas AB un CD krustojas punktā M, tad vienas hordas nogriežņu reizinājums ir vienāds ar otras hordas nogriežņu reizinājumu, tas ir, $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ (skat. 7. att.).



7. att.

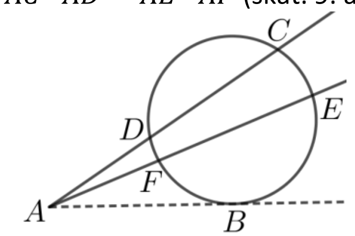
Definīcija. Par **sekanti** sauc taisni, kas krusto riņķa līniju divos dažādos punktos.

Teorēma par pieskari un sekanti. Ja pieskare un sekante ir novilktas no viena punkta, tad pieskares nogriežņa garuma kvadrāts ir vienāds ar visa sekantes nogriežņa garuma un sekantes ārējās daļas nogriežņa garuma reizinājumu, tas ir, $AB^2 = AC \cdot AD$ (skat. 8. att.).



8. att.

Secinājums (sekanšu īpašība). No punkta A var novilkt bezgalīgi daudz sekanšu, un katras sekantes ārējās daļas garuma reizinājums ar visa sekantes nogriežņa garumu ir vienāds ar pieskares nogriežņa garuma kvadrātu, tātad $AC \cdot AD = AE \cdot AF$ (skat. 9. att.).

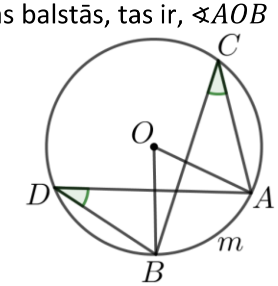


9. att.

Leņķi riņķa līnijā

Definīcija. Par **centra leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas riņķa līnijas centrā, bet malas krusto riņķa līniju.

Centra leņķa lielums ir vienāds ar tā loka leņķisko lielumu, uz kuru tas balstās, tas ir, $\sphericalangle AOB = \overset{\frown}{AmB}$ (skat. 10. att.).



10. att.

Definīcija. Par riņķa līnijā **ievilktu leņķi** sauc leņķi, kura virsotne atrodas uz riņķa līnijas, bet malas krusto riņķa līniju.

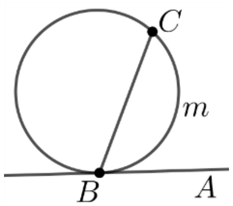
Teorēma. Ievilktā leņķa lielums ir vienāds ar pusi no tā loka leņķiskā lieluma, uz kuru tas balstās, tas ir, $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AmB}$ (skat. 10. att.).

Secinājumi

- Visi ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku, ir vienādi, piemēram, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ (skat. 10. att.).
- Leņķi, kas balstās uz vienas riņķa līnijas vienāda garuma hordām, ir vienādi, un otrādi.
- Ievilkts leņķis, kas balstās uz diametru, ir $90°$, un otrādi – ja ievilkts leņķis ir taisns, tad tas balstās uz diametru.

Definīcija. Leņķi, kura virsotne atrodas uz riņķa līnijas, viena mala satur hordu, bet otra mala atrodas uz pieskares, sauc par **hordas-pieskares leņķi**.

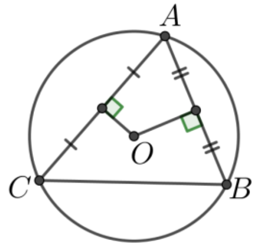
Teorēma. Hordas-pieskares leņķa lielums ir vienāds ar pusi no tā loka leņķiskā lieluma, kuru ietver leņķa malas, tas ir, $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BmC}$ (skat. 11. att.).



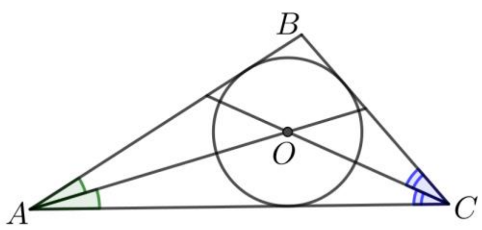
11. att.

Ievilkti un apvilkti trijstūri un četrstūri

Trijstūra malu vidusperpendikulu krustpunkts ir trijstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs (skat. 12. att.), bet trijstūra bisektrišu krustpunkts ir trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centrs (skat. 13. att.).



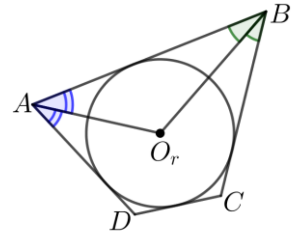
12. att.



13. att.

Taisnleņķa trijstūrī ievilktās riņķa līnijas rādiusu r aprēķina pēc formulas $r = \frac{a+b-c}{2}$, kur a un b ir katetes un c ir hipotenūza.

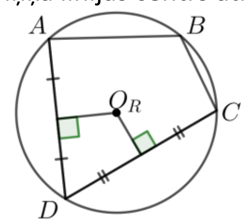
Definīcija. Par riņķa līnijai **apvilktu četrstūri** sauc četrstūri, kura visas malas pieskaras riņķa līnijai.
Attiecīgi riņķa līniju sauc par četrstūrī ievilktu riņķa līniju. Ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas četrstūra leņķu bisektrišu krustpunktā (skat. 14. att.).



14. att.

Teorēma. Izliektu četrstūri $ABCD$ var apvilkt ap riņķa līniju tad un tikai tad, ja tā pretējo malu garumu summas ir vienādas $AB + CD = BC + AD$.

Definīcija. Par riņķa līnijā **ievilktu četrstūri** sauc četrstūri, kura visas virsotnes atrodas uz riņķa līnijas.
Attiecīgi riņķa līniju sauc par četrstūrim apvilktu riņķa līniju. Apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas četrstūra malu vidusperpendikulu krustpunktā (skat. 15. att.).

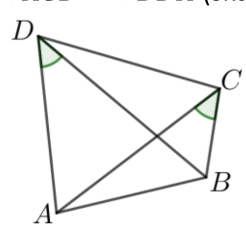


15. att.

Visbiežāk tiek lietota šāda teorēma par ievilktu četrstūri.
Teorēma. Ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja četrstūra pretējo leņķu lielumu summa ir $180°$.

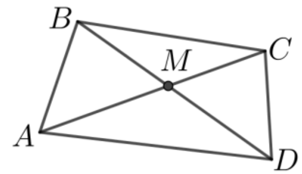
Izmanto arī citas teorēmas, lai pamatotu, ka ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju.

Teorēma. Ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BDA$ (skat. 16. att.).



16. att.

Teorēma. Ap četrstūri var apvilkt riņķa līniju tad un tikai tad, ja ir spēkā vienādība $AM \cdot MC = BM \cdot MD$, kur M ir nogriežņu AC un BD krustpunkts (skat. 17. att.).



17. att.

3. pielikums

Matemātikas olimpiāžu tēmas

5.-8. klase
Dirihlē princips (skat. 1. pielikumu)
Invariantu metode (skat.)
Invariantu metode – krāsošana (skat.)
Dalāmības pazīmes (skat.)
Svēršanas uzdevumi (skat.)
Grafi
Matemātiskās spēles (skat.)
Skaitļa pieraksts (skat.)
Periodiskas virknes (skat.)
Maģiskās konfigurācijas (skat.)
Vienādojumi veselos skaitļos (skat.)

9.-12. klase
Kongruences (skat.)
Vienādojumi veselos skaitļos
Nevienādību pierādīšana – pilno kvadrātu atdalīšana (skat.)
Nevienādība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko (skat.)
Rekurentas virknes (skat.)