

Matemātiskā indukcija

1. Trepēm ir 15 pakāpieni. Cik dažādos veidos pa tām var uzkāpt, ja katrā solī var kāpt pa vienu vai pa diviem pakāpieniem?

Matemātiskā indukcija ir metode ar ko pierādīt vispārīgus apgalvojumus. Lai pierādītu vispārīgu apgalvojumu: *visiem naturāliem n izpildās $A(n)$* , pierāda

1. indukcijas bāzi: $A(1)$

2. induktīvo pāreju: ja izpildās $A(k)$, tad izpildās arī $A(k + 1)$

Vairāk par matemātisko indukciju var atrast, piemēram, 1983. gada A. Andžāna un P. Zariņa grāmatā “Matemātiskās indukcijas metode un varbūtību teorijas elementi”, kas elektroniskā veidā pieejama <http://www.lanet.lv/info/matind/>, vai arī daudz kur citur, tā ir populāra tēma.

2. Pierādīt, ka $n^2 + n$ dalās ar 2.

3. Pierādīt, ka

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

4. Pierādīt, ka $n^3 + 5n$ dalās ar 6.

5. Pierādīt, ka

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

6. Plaknē novilkta n taisnes. Pierādīt, ka iegūtos apgabalus var izkrāsot divās krāsās tā, ka nekādi divi blakus apgabali nebūs nokrāsoti vienā krāsā.

7. Dotas 3^n pēc ārējā izskata vienādas monētas, no kurām viena ir viltota, tā ir vieglāka nekā pārējās. Pierādīt, ka ar n svēršanām uz sviras svāriem bez atsvariem var atrast viltoto monētu.

8. Pierādīt, ka skaitlis $\underbrace{111\dots1}_{3^n}$ dalās ar 3^n .

9. Pierādīt, ka katru naturālu skaitli, kas nepārsniedz $n!$, var sadalīt ne vairāk kā n saskaitāmajos, kas visi ir $n!$ dalītāji.

10. Pierādīt, ka visiem reāliem $-1 \leq x \leq 1$ un naturāliem n

$$(1+x)^n + (1-x)^n \leq 2^n.$$

Patiesībā matemātiskās indukcijas shēmas ir daudz un dažādas. Pati vienkāršākā modifikācija, kas reizēm jāveic, ir bāzes maiņa (atkarībā no tā, kas jāpierāda), bāze ne vienmēr ir vieninieks.

11. Pierādīt, ka visiem naturāliem $n \geq 3$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}.$$

12. Pierādīt, ka $2^n > n^2$ visiem naturāliem $n > 4$.

13. Pierādīt, ka $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ dalās ar 57 visiem naturāliem n .

14. Pilsētā dzīvo $n \geq 4$ pļāpas. Kādu dienu katrs no tiem uzzina kādu svarīgu jaunumu. Pierādīt, ka pietiek ar $2n - 4$ telefonsarunām, lai visi pļāpas uzzinātu visus jaunumus (katrā telefonsarunā abi pļāpas izstāsta viens otram visus sev zināmos jaunumus).

15. Pierādīt, ka katram naturālam $n \geq 6$ kvadrātu var sagriezt n kvadrātos.

Mājas uzdevumi par Fibonači virkni

Fibonači virknē $\{F_n\}$ katrs nākamais skaitlis ir divu iepriekšējo summa:

$$F_1 = F_2 = 1 \text{ un } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ visiem naturāliem } n \geq 1.$$

16. Pierādīt, ka

$$\begin{aligned} F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} &= F_{2n} \\ F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} &= F_{2n+1} - 1 \\ F_1 F_2 + F_2 F_3 + \cdots + F_{2n} F_{2n+1} &= F_{2n+1}^2 - 1 \\ F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n &= F_{n+2} - 1 \\ F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 &= F_n F_{n+1} \end{aligned}$$