

Funkcionālvienādojumi

Funkcionālvienādojumi ir vienādojumi, kuros nezināmais ir funkcija. Galvenā to risināšanas metode ir ievietošanas metode: ievietot mainīgo vietās konkrētus skaitļus $(0, 1, 2, -1, \dots)$, vai kādas izteiksmes (y vietā x , x vietā $f(x)$), lai iegūtu kādas vienkāršas sakarības. Tālāk palīdzēs šo sakarību kombinešana un brīžiem matemātiskā indukcija.

Bet vispirms atcerēsīmes, kas īsti ir funkcija. Katrai funkcijai $f : A \rightarrow B$ ir:

- Definīcijas apgabals A
- Vērtību apgabals B
- "Likums" f pēc kura katram $x \in A$ piekārto $f(x) \in B$.

Mēs aplūkosim tikai skaitliskas funkcijas, kur A un B ir kādas skaitļu kopas: reālie skaitļi \mathbb{R} , vesēlie skaitļi \mathbb{Z} , naturālie skaitļi \mathbb{N} , racionālie skaitļi \mathbb{Q} .

Funkcijām var būt vienkāršs algebrisks pieraksts, piemēram $f(x) = x^2 - 3$ vai $f(x) = 0$, bet ne tuvu ne visām tāds ir iespējams. Piemēram, varam aplūkot funkciju $d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, kur $d(n)$ ir naturāla skaitļa n dalītāju skaits.

Katrai funkcijai var uzzīmēt tās grafiku: tas ir visu to punktu (x, y) kopa koordinātu plaknē, kuriem $y = f(x)$.

Populārākie funkciju tipi: lineāras funkcijas, kvadrātfunkcijas, pāra funkcijas, nepāra funkcijas, augošas un dilstošas funkcijas, periodiskas funkcijas, konstantas funkcijas.

Ievaduzdevumi

Atrast kādu funkciju f , kurai

1. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(2) = f(3) = f(4)$, $f(5) \neq f(6)$,
2. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 5$,
3. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x+1) = f(1-x)$,
4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f ir pāra funkcija un $f(0) = 1$,
5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f ir nepāra funkcija un $f(0) = 1$,
6. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f ir augoša intervālā $(3, 5)$, bet dilstoša intervālos $(-\infty, 3)$ un $(5, +\infty)$,
7. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $x < f(x) < 5x$ visiem $x \in \mathbb{N}$,
8. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $2x < f(x) < 3x$ visiem $x \in \mathbb{N}$,
9. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$, $f(x) \neq f(x+1)$ visiem $x \in \mathbb{Z}$,
10. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = f(x+3)$ visiem $x \in \mathbb{Z}$ un $f(0) = 4$,
11. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x) + 3$ visiem $x \in \mathbb{R}$,
12. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(2x) = 4f(x)$ visiem $x \in \mathbb{R}$,
13. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x+1) = 2f(x)$ visiem $x \in \mathbb{R}$,
14. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)^2 = f(x)$ visiem $x \in \mathbb{R}$ (atrast 3 gab),
15. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(f(x)) = x$ visiem $x \in \mathbb{R}$ (atrast 3 gab),
16. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(f(x)) = x + 2$ visiem $x \in \mathbb{N}$,

Pārbaudes

1. Noskaidrojiet, kura(s) no dotajām funkcijām apmierina doto funkcionālvienādojumu

1. $f((x-y)^2) = f(x)^2 - 2xf(y) + y^2$ visiem $x, y \in \mathbb{R}$

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = x - 1$

c) $f(x) = x + 1$

2. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ visiem $x, y \in \mathbb{R}$

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = x - 1$

c) $f(x) = 3x$

3. $f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$ visiem $x, y \in \mathbb{R}$

a) $f(x) = 1$

b) $f(x) = 1 - x$

c) $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$

Īsti funkcionālvienādojumi

2. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, kurām $f(0) = 3$ un visiem $x \in \mathbb{Z}$ ir spēkā:

$$f(x+1) = f(x) + 2.$$

3. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, kurām visiem $x, y \in \mathbb{Z}$ ir spēkā:

$$f(x-y) = f(x) - f(y) + 2$$

un a) $f(1) = 3$ b) $f(3) = 11$ c) nekas papildus nav zināms.

4. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kurām visiem $x, y \in \mathbb{R}$ ir spēkā:

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

5. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$, kurām visiem $m, n \in \mathbb{N}$ ir spēkā:

- $f(mn) = f(m) + f(n)$,
- $f(m) = 0$, ja m beidzas ar ciparu 3 un
- $f(10) = 0$.

6. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, kurām visiem $x, y \in \mathbb{N}$ ir spēkā:

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$$

un a) $f(1) = 2$ b) nekas papildus nav zināms.

7. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, kurām visiem $m, n \in \mathbb{N}$ ir spēkā:

- $f(2) = 2$,
- $f(mn) = f(m)f(n)$,
- $f(m) < f(n)$, ja $m < n$.