

## Funkcionālvienādojumi

Funkcionālvienādojumi ir vienādojumi, kuros nezināmais ir funkcija. Galvenā to risināšanas metode ir ievietošanas metode: ievietot mainīgo vietās konkrētus skaitļus  $(0, 1, 2, -1, \dots)$ , vai kādas izteiksmes ( $y$  vietā  $x$ ,  $x$  vietā  $f(x)$ ), lai iegūtu kādas vienkāršas sakarības. Tālāk palīdzēs šo sakarību kombinešana un brīžiem matemātiskā indukcija.

### Ievaduzdevumi

Atrast kādu funkciju  $f$ , kurai

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(27x) = 3f(x)$  visiem  $x \in \mathbb{R}$ ,
2.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x - 5) + 3 = f(x)$  visiem  $x \in \mathbb{R}$ ,
3.  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(x^2) = x^3 + 1$  visiem  $x \in \mathbb{N}$ ,
4.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(2x) = 4f(x) + 3$  visiem  $x \in \mathbb{R}$ ,

### Pārbaudes

1. Noskaidrojiet, kura(s) no dotajām funkcijām apmierina doto funkcionālvienādojumu

1.  $f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$  visiem  $x, y \in \mathbb{R}$ 
  - a)  $f(x) = 0$
  - b)  $f(x) = x$
  - c)  $f(x) = x^2$
2.  $n^2 + 4f(n) = f(f(n))^2$  visiem  $n \in \mathbb{Z}$ 
  - a)  $f(n) = 0$
  - b)  $f(n) = n + 1$
  - c)  $f(x) = \begin{cases} n + 1, & \text{ja } n > 0 \\ 0, & \text{ja } n = 0 \\ 1 - n, & \text{ja } n < 0 \end{cases}$

### Funkcionālvienādojumi

2. Atrast visas funkcijas  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , kurām visiem  $x, y \in \mathbb{N}$  ir spēkā:

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1$$

un a)  $f(1) = 2$  b) nekas papildus nav zināms.

3. Atrast visas funkcijas  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , kurām visiem  $m, n \in \mathbb{N}$  ir spēkā:

- $f(2) = 2$ ,
- $f(mn) = f(m)f(n)$ ,
- $f(m) < f(n)$ , ja  $m < n$ .

4. Atrast visas funkcijas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , kurām visiem  $x, y \in \mathbb{R}$  ir spēkā

1.  $f(xy) = xf(x) + yf(y)$
2.  $f(x + y) - 2f(x - y) + f(x) - 2f(y) = y - 2$
3.  $f(x + y) + f(x - y) = f(3x)$
4.  $2f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{5x}{x^2 + 1} - 1$
5.  $f(f(x + y)) = f(x + y) + f(x)f(y) - xy$

5. Noskaidrojiet, vai funkcijas  $f$  un  $g$  ir vienādas vai dažādas:

1.  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x - 1, g(x) = |x - 1|$

2.  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x - 2, g(x) = |x - 2|$

3.  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x^6 \pmod{7}, g(x) = 1$

4.  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right), g(x) = \frac{1-(-1)^x}{2}$

6. Atrast visas funkcijas  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ , kurām visiem  $n \in \mathbb{Z}$  ir spēkā

$$f(n) = \begin{cases} n - 10, & \text{ja } n > 100, \\ f(f(n + 11)), & \text{ja } n \leq 100 \end{cases} .$$

7. Atrast visas funkcijas  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , kurām visiem  $n \in \mathbb{Z}$  ir spēkā

$$f(f(n)) = f(f(n + 2) - 2) = n.$$

8. Atrast visas funkcijas  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , kurām visiem  $a, b \in \mathbb{Z}$  ir spēkā

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$