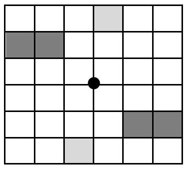
"Profesora Cipariņa klubs"

2. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Divi spēlētāji izvieto žetonus kvadrātā, kas sastāv no 6×6 rūtiņām. Gājienus spēlētāji izdara pamīšus, turklāt vienā gājienā drīkst izvietot vai nu 1 žetonu vienā rūtiņā, vai arī 2 žetonus pa vienam divās blakus rūtiņās, kas atrodas vai nu vienā rindā, vai vienā kolonnā, ja tās ir tukšas. Spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš spēlētājs – pirmais vai otrais – vienmēr var uzvarēt?

Atrisinājums. Pamatosim, ka vienmēr uzvarēs otrais spēlētājs.

Lai arī kur pirmais spēlētājs novieto savu žetonu (vai arī divus žetonus) otrajam spēlētājam jānovieto žetons (žetoni) simetriski pirmā spēlētāja tikko novietotajam žetonam (žetoniem) attiecībā pret kvadrāta centru. Tā otrais spēlētājs turpina rīkoties arī visos savos nākamajos gājienos. Ja pirmais spēlētājs var izdarīt gājienu, tad otrais spēlētājs var izdarīt tam simetrisku gājienu. Līdz ar to gājieni pietrūks pirmajam spēlētājam un viņš zaudēs.

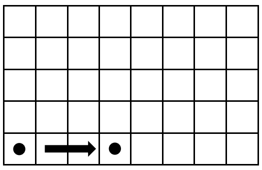


1. att.

2. Uz taisnstūra, kas sastāv no 5×8 rūtiņām, apakšējā kreisajā stūrī uz rūtiņas novietota poga. Divi spēlētāji pamīšus pārvieto pogu vai nu uz augšu vai pa labi patvaļīgu rūtiņu skaitu, iekļaujoties taisnstūra robežās. Spēlētājs, kurš pirmais novietos pogu augšējā labajā stūrī uzvar. Vai kādam no spēlētājiem ir uzvaroša stratēģija?

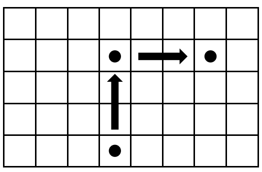
Atrisinājums. Pamatosim, ka pirmajam spēlētājam ir uzvaroša stratēģija.

Pirmajā gājienā pirmajam spēlētājam jāpakustina poga trīs lauciņus pa labi, lai poga atrastos uz diagonāli, kas ved uz gala lauciņu (skat. 2. att.).



2. att.

Tagad neatkarīgi no tā, kā pārvieto pogu otrais spēlētājs, pirmais spēlētājs vienmēr var nokļūt atpakaļ uz diagonāli, kas ved uz uzvarošo lauciņu (skat. 3. att.).



3. att.

3. Lote un Oto spēlē sekojošo spēli. Vispirms Lote pasaka kādu no skaitļiem $1, 2$ vai 3. Tad Oto var izvēlēties pieskaitīt Lotes pateiktajam skaitlim $1, 2$ vai 3. Šādi spēle turpinās, katram spēlētājam pamīšus pieskaitot $1, 2$ vai 3 iepriekšējam skaitlim. Piemēram, ja Lote pirmajā gājienā nosauc skaitli 2, tad Oto var teikt 5, bet Lote pēc tam 6 un tā tālāk. Pirmais, kas nosauc skaitli 100, uzvar. Kuram no abiem spēlētājiem ir uzvaroša stratēģija?

Atrisinājums. Pamatosim, ka Oto vienmēr var uzvarēt.

Lai kādu skaitli nosauktu Lote, Oto var nosaukt skaitli, kas dalīsies ar 4. Ja Lote pirmajā gājienā nosauc 1, tad Oto var pieskaitīt 3 un nosaukt 4. Ja Lote nosauc 2, tad Oto var pieskaitīt 2 un iegūt 4. Ja Lote nosauc 3, tad Oto var pieskaitīt 1 un nosaukt 4. Arī turpmākajos gājienos Oto šādi var rīkoties, skatoties uz to, ko Lote pieskaita skaitlim, lai iegūtu skaitli, kas dalās ar 4. Ievērojam, ka Lote nekad nevarēs nosaukt skaitli, kas dalās ar 4, ja Oto izmantos šo stratēģiju. Tā kā 100 dalās ar 4, tad secinām, ka Oto vienmēr var uzvarēt.

4. Sērkociņu kastītē ir 100 sērkociņi. Mārtiņš un Katrīna pamīšus velk ārā ne vairāk kā pusi no kastītē esošajiem sērkociņiem, bet vismaz vienu sērkociņu. Tas, kurš izvelk pēdējo sērkociņu, uzvar. Kuram ir uzvaroša stratēģija, ja Mārtiņš vienmēr uzsāk spēli pirmais?

Atrisinājums. Pamatosim, ka Mārtiņš vienmēr var uzvarēt.

Apskatīsim spēli no otra gala, lai censtos saprast, kurš var uzvarēt pie maziem sērkociņu skaitiem. Ja kastītē ir tikai viens sērkociņš, tad skaidrs, ka tas, kuram ir gājiens, uzvar. Ja kastītē ir divi sērkociņi, tad tas, kuram gājiens, galu galā zaudēs, jo viņš būs spiests izņemt vienu sērkociņu un atstāt pēdējo otram. Ja kastītē atlikuši tikai 3 vai 4 sērkociņi, tad tas, kuram ir gājiens, var uzvarēt, jo viņš var izņemt attiecīgi 1 vai 2 sērkociņus un piespiest otram spēlētājam sākt gājienu ar 2 sērkociņiem, kura, kā mēs jau iepriekš nospriedām, ir zaudējoša situācija. Ja gājiena sākumā ir 5 sērkociņi, tad spēlētājs var izņemt tikai 1 vai 2 sērkociņus, dodot otram spēlētājam uzvarošu situāciju, tāpēc šī ir zaudējoša situācija. Šādi mēs varam turpināt apskatīt gadījumus, kurš kuram var piespiest zaudēt un uzveidot virknes.

Sērkociņi:	1	2	3	4	5	6	…	10	11	12	…	22	23	24	…	46	47	48	…	94	95	96	…	190	191	192	…
Iznākums:	U	Z	U	U	Z	U	U	U	Z	U	U	U	Z	U	U	U	Z	U	U	U	Z	U	U	U	Z	U	

Ja paņemam kā piemēru situāciju ar 5 sērkociņiem, tad varam censties izprast, kā šī virkne veidojās. Mūsu mērķis ir atrast visus tos sērkociņu skaitus, kas var piespiest otram spēlētājam sākt savu gājienu ar 5 sērkociņiem, kas galu galā noved pie zaudējuma. Pēc noteikumiem no kastītes nevar izņemt ārā vairāk kā pusi no kastītē esošajiem sērkociņiem. Tas nozīmē, ka atstāt 5 sērkociņus mēs varam tikai tajā gadījumā, ja kastītē neatrodas vairāk kā 10 $(5 \cdot 2)$ sērkociņi, jo pretējā gadījumā būtu jāizņem vairāk par pusi. Tātad, ja kastītē ir palikuši no 6 līdz 10 sērkociņiem, mēs varam piespiest otram sākt gājienu ar 5 sērkociņiem, un šī tad būtu uzvaroša stratēģija. Tālāk varam spriest par 11. Iepriekš jau nospriedām, ka no šīs situācijas nevaram piespiest otram sākt gājienu ar 5, tāpēc šī būs zaudējoša situācija, jo būs jāatdod otram gājiens uzvarošā situācijā. Tad atkal skatāmies uz tiem sērkociņu skaitiem, kas var piespiest situāciju, lai kastē paliek tikai 11. Šie būs visi sērkociņu skaiti no 12 līdz $11 \cdot 2 = 22$. Šie sērkociņu skaiti būs uzvarošās situācijas. Šādi varam rīkoties līdz aizpildām pietiekoši tālu un redzam, kur iekļaujas skaitlis 100. Skaitlis 100 būs uzvaroša stratēģija, tāpēc varam secināt, ka Mārtiņš vienmēr var uzvarēt, ja viņš piespiedīs Katrīnai uzsākt savu gājienu zaudējošā situācijā. Mārtiņam pirmajā gājienā jāizvelk 5 sērkociņi un pēc tam jāturpina apspriestā stratēģija, cenšoties izņemt tik daudz sērkociņu, lai paliek tieši $2, 5, 11, 23$ vai 47 sērkociņi.

5. Uz kvadrāta, kas sastāv no 5×5 rūtiņām, Šarlote un Leo spēlē "desas". Katrs spēlētājs pamīšus izvēlas kādu neaizņemtu rūtiņu. Leo raksta "X" rūtiņās, bet Šarlote savās rūtiņās – "O". Uzvar tas, kurš var aizpildīt kādu rindu, kolonnu vai diagonāli ar savu simbolu, t. i., Leo vēlas panākt, ka kādā rindā, kolonnā vai diagonālē būtu visi "X" , bet Šarlote – "O". Gadījumā, ja visi lauciņi jau ir aizņemti, un neviens nav uzvarējis, tad spēli uzskata par neizšķirtu. Vai Šarlote vienmēr var panākt to, ka Leo neuzvarēs? *Piezīme.* Leo neuzvar gadījumos, ja Šarlote uzvar vai arī spēle ir neizšķirta.

Atrisinājums. Pamatosim, ka Šarlote prasītu var panākt.

Šarlotes mērķis ir panākt to, ka katra rinda, kolonna vai diagonāle ir nobloķēta. Šo viņa varēs izdarīt, ja sekos šādai shēmai (skat. 4. att.).

1	6	8	6	2
3	9	12	12	4
7	9		10	7
3	11	11	10	4
2	5	8	5	1

4. att.

Lai arī kādu gājienu neveiktu Leo, Šarlote var simetriski izvēlēties otru rūtiņu skaitļu pārī, lai nobloķētu kādu rindu, kolonnu vai diagonāli. Ja Šarlotei tiek pirmais gājiens, viņa var aizpildīt centru. Ja Leo pirmajā gājienā aizpilda centru, tad Šarlote brīvi var turpināt izvēlēties, kuru no rūtiņām aizbloķēt.

Šeit svarīgi ievērto, ka katrā rindā, kolonna un diagonālē ir savs skaitļu pāris, tāpēc Šarlotei vienmēr izdosies nobloķēt katru rindu, kolonnu un diagonāli.