

Kombinatoriskās ģeometrijas uzdevumi

1. [Kvadrāta sadalīšana] Katra no 9 taisnēm sadala kvadrātu divos četrstūros, kuru laukumu attiecība ir $2 : 3$. Pierādiet, ka eksistē punkts, kurā satiekas vismaz trīs no šīm taisnēm!

2. [Eilera formula daudzskaldņiem] Pierādiet, ka jebkuram izliektam daudzskaldnim izpildās sakarība $V + F - E = 2$, kur V - virsotņu skaits, E - šķautņu skaits un F - skaldņu skaits!

3. [Apla sadalīšana] Kāds ir lielākais daudzums laukumu, kuros riņķi sadala tajā ievilks n -stūris un visas tā diagonāles?

4. [BW1999] Vai diska ar rādiusu 1 (ieskaitot aploci) punktus var sadalīt trīs apakškopās tā, lai nevienā apakškopā neatrastos divi punkti, kuru attālums ir tieši 1?

5. [IMO2013PL2] n sarkanu un $n + 1$ zilu punktu izvietojums plaknē saucas par Kolumbisku, ja nevieni trīs punkti neatrodas uz vienas taisnes. Vairāku taisņu izvietojumu šajā plaknē sauc par pūderainu, ja neviena taisne nesatur nevienu no Kolumbiskā izkārtojuma punktiem un neviens no reģioniem, kuros plakni sadala šīs taisnes, nesatur abu krāsu punktus.

Atrodiet mazāko k , priekš kura katram Kolumbiskam 4027 punktu izkārtojumam eksistē pūderains k taisņu izvietojums!

6. [IMO2017PL3] Medniece un neredzams trusītis spēlē spēli Eiklīda plaknē. Trusīša sākuma atrašanās punkts A_0 sakrīt ar mednieces sākuma atrašanās punktu B_0 . Pēc $n - 1$ gājiena, trusītis atrodas punktā A_{n-1} un medniece atrodas punktā B_{n-1} . Gājienā numur n secīgi notiek sekojošas lietas.

- (i) Trusītis, medniecei neredzot, pārvietojas uz punktu A_n tā, ka attālums starp A_{n-1} un A_n ir tieši 1.
- (ii) Radars paziņo medniecei punktu P_n . Radars garantē tikai to, ka attālums starp P_n un A_n nepārsniedz 1.
- (iii) Medniece, trusītim redzot, parvietojas uz punktu B_n tā, ka attālums starp B_{n-1} un B_n ir tieši 1.

Vai, lai kā nekustētos trusītis un kādus punktus nerādītu radars, medniece var izvēlēties savus gājienu tā, ka pēc 10^9 gājieniem viņa var garantēt, ka attālums starp viņu un trusīti nepārsniedz 100?