

## Funkcionālvienādojumi

Funkcionālvienādojumi ir vienādojumi, kuros nezināmais ir funkcija. Galvenā to risināšanas metode ir ievietošanas metode: ievietot mainīgo vietās konkrētus skaitļus  $(0, 1, 2, -1, \dots)$ , vai kādas izteiksmes ( $y$  vietā  $x$ ,  $x$  vietā  $f(x)$ ), lai iegūtu kādas vienkāršas sakarības. Tālāk palīdzēs šo sakarību kombinēšana un brīžiem matemātiskā indukcija.

1. Atrast visas funkcijas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , kurām visiem  $x, y \in \mathbb{R}$  ir spēkā:

1.  $f(xy) = xf(x) + yf(y)$
2.  $f(x + y) + 2f(x - y) + f(x) + 2f(y) = 4x + y$
3.  $f(x + y) - 2f(x - y) + f(x) - 2f(y) = y - 2$
4.  $f(x + y) + f(x - y) - (y + 2)f(x) + y(x^2 - 2y) = 0$
5.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x)f(x + y) = f(y)^2f(x - y)^2e^{y+4}$
6.  $f(x + y) + f(x - y) = f(3x)$
7.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x)^2 + f(x)f(y) = x^2 + xy$

2. Atrast visas funkcijas

1.  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,  $1 + f(0) + f(1) + \dots + f(n - 1) = f(n)$
2.  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(x + y) = f(x) + f(y)$
3.  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $f(x + y) = f(x) + f(y)$
4.  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{ja } n > 100 \\ f(f(n + 11)) & \text{ja } n \leq 100 \end{cases}$
5.  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1$ , ja a)  $f(1) = 2$ , b)  $f(1) = f(1)$

3. Par kādu algebrisku operāciju  $x \star y$  zināms, ka visiem  $x, y, z$  izpildās  $x \star (y \star z) = (x \star y) + z$  un  $x \star x = 0$ . Aprēķināt  $1993 \star 1995$ .

4. Funkcijai  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  visiem reāliem  $x$  izpildās  $f(f(x)) = x^2 - x + 1$ . Aprēķiniet  $f(0)$ .

5. Augošas skaitļu virknes  $a_1, a_2, \dots$  locekļi ir naturāli skaitļi. Zināms, ka  $a_1 = 2$  un ka  $a_{a_k} = 2k + 1$  visiem  $k$ . Aprēķināt  $a_2, a_{31}, a_{40}$ .

6. Atrast visas funkcijas

1.  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\frac{1}{x}f(-x) + f(\frac{1}{x}) = x$
2.  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $2f(x) + 3f(\frac{1}{x}) = 3 + \frac{5x-1}{x^2+1}$
3.  $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) + f(\frac{1}{1-x}) = x$ ,
4.  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , dots reāls skaitlis  $\alpha$ ,  $\alpha x^2 f(\frac{1}{x}) + f(x) = \frac{x}{x+1}$