Mājas darbs uz 20.02.: 4., 7., uzdevumi.

Iesildīšanās

1. Atrast visas funkcijas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, kurām visiem $x,y\in\mathbb{R}$ ir spēkā

$$f\left((x-y)^2\right)=f(x)^2-2xf(y)+y^2.$$

2. Atrast visas funkcijas $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, kurām visiem $x,y\in\mathbb{N}$ ir spēkā

$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$$

un a) $f(1)=2$, b) $f(1)=f(1)$.

Injektīvas, sirjektīvas un bijektīvas funkcijas

Funkcija ir sirjektīva, ja tā pieņem visas vērtības savā definīcijas apgabalā. Citiem vārdiem sakot, funkcija $f:A\to B$ ir sirjektīva, ja katram $y\in B$ var atrast tādu $x\in A$, kuram $f(x)=y$.

Funkcija ir injektīva, ja tā katru vērtību savā vērtību apgabalā pieņem maksimums vienu reizi. Citiem vārdiem sakot $f:A\to B$ ir injektīva, ja nav tāda $y\in B$, ka diviem dažādiem $x_1,x_2\in A$ ir spēkā $f(x_1)=y$ un $f(x_2)=y$. Vēl citiem vārdiem sakot, funkcija $f:A\to B$ ir injektīva, ja no tā, ka $f(x_1)=f(x_2)$, izriet, ka $x_1=x_2$.

Funkcija ir bijektīva, ja tā ir sirjektīva un injektīva. Citiem vārdiem sakot, funkcija ir bijektīva, ja katru vērtību savā vērtību apgabalā tā pieņem tieši vienu reizi. Bijektīvai funkcijai $f:A\to B$ var konstruēt inverso funkciju $f^{-1}:B\to A$, kurai $f^{-1}(y)=x\Leftrightarrow f(x)=y$.

Vai ir sirjektīvas/injektīvas funkcijas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x^3$ b)$f(x)=x^3+3x$ c)$f(x)=x^3-3x$

d) $f(x)=2^x$ e) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{,ja } x\neq 0\\ 0 & \text{citādi}\end{cases}$ f) $f(x)=\sin x$

Vai ir sirjektīvas/injektīvas funkcijas $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$:

g) $f(x)=x$ uzrakstīts no otra gala h) $f(f(x))=x$ i) $f(x)=2x+1$

j) $f(x)=\begin{cases}2x+53 & \text{, ja } 2x+51 \text{ ir salikts skaitlis}\\ \text{mazākais saliktais nepāra skaitlis, kas pārsniedz } 2x+51 & \text{, ja } 2x+51 \text{ ir pirmskaitlis}\end{cases}$

3. Atrast visas funkcijas

1. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, kurām visiem $x\in\mathbb{N}$ izpildās $f(n)+f(f(n))+f(f(f(n)))=3n$
2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, kurām visiem $x,y\in\mathbb{R}$ izpildās $f(xf(x)+f(y))=f(x)^2+y$
3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, kurām visiem $x,y\in\mathbb{R}$ izpildās $f(f(x)+y)=f(y)+\sin(x)$

4. Vai eksistē injektīva funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, kas visiem $x\in\mathbb{R}$ apmierina nevienādību $f(x^2)-f(x)^2\geq\frac{1}{4}$?

5. Vai eksistē funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, kurai visiem $x\in\mathbb{R}$ ir spēkā $f(f(x))=\sin(x)$?

6. Dota bijektīva funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Pierādīt, ka funkciju $f(x)$ un $f^{-1}(x)$ grafiki ir simetriski attiecībā pret taisni $y=x$.

7. Pierādīt, ka grafiks funkcijai $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, kas katram $x\in\mathbb{R}$ apmierina sakarību $f(f(x))=-x$, attēlojas pats par sevi, ja to pagriež par $90°$ ap koordinātu sākumpunktu.

Atrast kaut vienu šādu funkciju.

8. Vai eksistē funkcijas $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, kuras apmierina sakarības $f(g(x))=x^2$ un $g(f(x))=x^3$?

9. Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nav injektīva un eksistē tāda funkcija $g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ka visiem $x,y\in\mathbb{R}$ izpildās $f(x+y)=g(f(x),y)$. Pierādīt, ka f ir periodiska.

10. Atrast visas funkcijas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, kam visiem $x,y\in\mathbb{R}$ ir spēkā

$$f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1.$$