

# Izmēģinājuma treniņkomplekts

---

2021. gada 20. februāris.

Formāls risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes, bet drīkst risināt arī ilgāk, šis galu galā ir treniņš.

Ja galīgi nav ideju, ko darīt, tad trešajā lapā ir ļoti īsas idejiskas norādes, kādā virzienā varētu meklēt atrisinājumu

Atrisinājumus sūtīt Mārim Valdatam uz maris@kautkur.lv līdz 8. martam.

1. Dota bezgalīga reālu pozitīvu skaitļu virkne  $a_0, a_1, a_2, \dots$ . Pierādīt, ka bezgalīgi daudziem  $n$  ir spēkā nevienādība

$$1 + a_n > a_{n-1} \sqrt[n]{2}.$$

2. Sauksim par draudzīgu trijnieku tādu 3 cilvēku kopu, kas katrs ar katru draudzējas, un attiecīgi par draudzīgu piecinieku — tādu 5 cilvēku kopu, kas katrs ar katru draudzējas.

Komisijas sēdē piedalījās  $n \geq 3$  deputāti, starp tiem nebija neviena draudzīga piecinieka un katriem diviem draudzīgiem trijniekiem bija vismaz viens kopīgs deputāts. Pierādīt, ka var izvēlēties divus deputātus, kuriem, izejot no sēdes, sēdē nepalīktu neviena draudzīga trijnieka.

3. Trijstūrī  $ABC$  ievilkts kvadrāts tā, ka divas tā virsotnes atrodas uz malas  $BC$ , viena atrodas uz malas  $AC$  un viena — uz  $AB$ . Šī kvadrāta centru apzīmēsim ar  $A_1$ . Aplūkosim vēl divus tādus ievilkta kvadrātus, kuriem divas virsotnes atrodas attiecīgi uz malām  $AC$  un  $AB$ , un to centrus apzīmēsim attiecīgi ar  $B_1$  un  $C_1$ .

Pierādīt, ka taisnes  $AA_1$ ,  $BB_1$  un  $CC_1$  krustojas vienā punktā.

4. Pierādīt, ka var atrast 100 tādus naturālus skaitļus, kas nepārsniedz 25000, ka to visas summas pa pāriem ir dažādas.

# Izmēginājuma treniņkomplekts

---

Šī lapa ir tukša, lai būtu tālāks ceļš līdz norādēm.

## Izmēginājuma treniņkomplekts

---

1. Pieņemiet pretējo un aplūkojiet virkni

$$A_n = a_n * 2^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n})}.$$

2. Šis ir salīdzinoši viegls uzdevums, kas risinās ar gadījumu pārlasi. Grūtākais ir gadījums, kad diviem draudzīgiem trijniekiem ir divi kopīgi deputāti.

3. Ievērojiet, ka, ja taisne  $AA_1$  sadala kvadrāta augšējo malu nogriežņos ar garumiem  $u$  un  $v$ , tad tā apakšējo malu tā sadala nogriežņos ar garumiem  $v$  un  $u$ . Un, protams, lietojiet Čevas teorēmu.

4. Ņemiet pirmskaitli  $p = 101$  un aplūkojiet skaitļus  $2pn + \alpha_n$ , kur  $0 \leq n \leq p - 1$ , kādi  $\alpha_n$  ( $0 < \alpha_n < p - 1$ ) jāņem, lai uzdevuma nosacījumi izpildītos, to izdomājiet paši.