Latvijas 71. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi un atrisinājumi
9.-12. klase

9. klase

9.1. Neaizsalušas upes krastā 50 km attālumā atrodas divas piestātnes Novadija un Olimpija, no kurām vienlaicīgi izbrauca Rihards un Kalvis. Rihards ar laivu izbrauca no Novadijas un brauca pret straumi, bet Kalvis ar laivu izbrauca no Olimpijas un brauca pa straumi. Pēc 3 stundām abi sastapās. Aprēķināt abu braucēju laivu ātrumu stāvošā ūdenī, ja zināms, ka ātrumi stāvošā ūdenī ir vienādi un upes straumes ātrums ir 5 km/h.

Atrisinājums. Riharda un Kalvja laivu kustības ātrumu stāvošā ūdenī apzīmējam ar x. Tad Rihards uz Olimpiju brauca ar ātrumu $(x-5)$ km/h, savukārt Kalvis uz Novadiju brauca ar ātrumu $(x+5)$ km/h. Līdz tikšanās momentam Rihards nobrauca $3(x-5)$ km un Kalvis nobrauca $3(x+5)$ km. Kopā abi braucēji nobrauca $3(x-5)+3(x+5)$ jeb 50 km. Sastādām vienādojumu un to atrisinām:

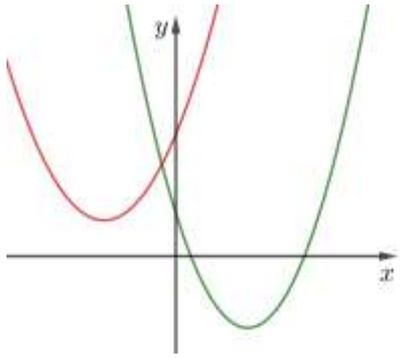
$$3(x-5)+3(x+5)=50;$$
$$3x-15+3x+15=50;$$
$$6x=50;$$
$$x=8\frac{1}{3}.$$

Esam ieguvuši, ka Riharda un Kalvja laivu kustības ātrums stāvošā ūdenī ir $8\frac{1}{3}$ km/h.

Piezīme. Uzdevumu var risināt arī ar darbībām (bez mainīgā ieviešanas), bet tādā gadījumā visas darbības ir jāpaskaidro.

Ievieš apzīmējumus	2
Pareizi izmanto formulu $s=vt$	1
Sastāda vienādojumu	3
Atrisina vienādojumu	3
Uzraksta atbildi	1
Risinot vienādojumu, ir skaitliska kļūda, kas būtiski neietekmē risinājumu	Ne vairāk kā 9
Risināts ar darbībām, bet nav paskaidrojumi	Ne vairāk kā 3

9.2. Vai var gadīties, ka 1. att. ir doti funkciju $y = ax^2 + bx + c$ un $y = bx^2 + cx + a$ grafiki? Funkciju grafiki nav zīmēti mērogā.



1. att.

Atrisinājums. Nē, nevar gadīties. Tā kā parabolu zari vērsti uz augšu, tad $a > 0$ un $b > 0$. Abi grafiki krusto y asi punktos, kuru ordinātas ir pozitīvas, tāpēc $a > 0$ un $c > 0$.
Tālāk risinājumu var turpināt trīs veidos.
1. veids. Apskatām abu parabolu virsotņu x koordinātas:

- funkcijai $y = ax^2 + bx + c$ virsotnes x koordināta ir $x_v = -\frac{b}{2a} < 0$, jo $a > 0$ un $b > 0$;
- funkcijai $y = bx^2 + cx + a$ virsotnes x koordināta ir $x_v = -\frac{c}{2b} < 0$, jo $b > 0$ un $c > 0$.

Iegūta pretruna, jo 1. att. zaļajai parabolai (tai, kura krusto x asi) virsotnes koordināta $x_v > 0$.
2. veids. Ievērosim, ka zaļajai parabolai (tai, kura krusto x asi) ir divas pozitīvas saknes. Bet kvadrātvienādojumam, kam visi trīs koeficienti ir pozitīvi, nevar būt pozitīvas saknes (ja $A, B, C > 0$, tad $Ax^2 + Bx + C > 0$ visiem pozitīviem x).
3. veids. Ievērosim, ka zaļajai parabolai (tai, kura krusto x asi) ir divas pozitīvas saknes x_1 un x_2. Pieņemsim, ka tās vienādojums ir $y = ax^2 + bx + c$ (otrs gadījums līdzīgs). Saskaņā ar Vjeta teorēmu $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$. Iegūta pretruna, jo divu pozitīvu skaitļu summa nevar būt negatīva.

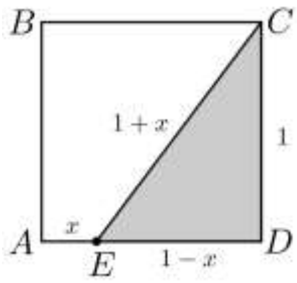
Par atbildi "Nē", "Pierādīsim, ka nevar gadīties..." vai tamlīdzīgu tekstu, kurā skaidri norādīts, ka prasītais nav iespējams	1
Pamato, ka $a > 0$ un $b > 0$	1
Pamato, ka $a > 0$ un $c > 0$	2
1. veids	
Ideja par parabolas virsotnes x koordinātu izmantošanu un formula $x_0 = -\frac{b}{2a}$	1+1
Aprēķina abu parabolu virsotnes x koordinātu	1+1
Secina, ka ir pretruna	2
2. veids	
Uzraksta, ka zaļajai parabolai (tai, kura krusto x asi) ir divas dažādas pozitīvas saknes	2
Pamato, ka, ja $A, B, C > 0$, tad $Ax^2 + Bx + C > 0$ visiem pozitīviem x (pretruna, jo nav pozitīvu sakņu)	4
3. veids	
Uzraksta, ka zaļajai parabolai (tai, kura krusto x asi) ir divas dažādas pozitīvas saknes	2
Izsaka saknes, izmantojot diskriminantu, vai sastāda Vjeta formulas sakņu summai	2
No sakņu formulas ar diskriminantu secina, ka viena sakne ir negatīva (pretruna) vai arī no Vjeta teorēmas iegūst, ka sakņu summa ir negatīva (pretruna)	2

9.3. Uz kvadrāta $ABCD$ malas AD izvēlēts punkts E tā, ka $AB + AE = CE$. Aprēķināt S_{CED}, ja $AB = 1$.

Atrisinājums. Apzīmējam $AE = x$, tad $ED = 1 - x$ un $EC = 1 + x$ (skat. 2. att.). Pēc Pitagora teorēmas trijstūrī EDC iegūstam, ka

$$EC^2 = ED^2 + CD^2,$$
$$(1+x)^2 = (1-x)^2 + 1^2,$$
$$1 + 2x + x^2 = 1 - 2x + x^2 + 1,$$
$$4x = 1,$$
$$x = \frac{1}{4}.$$

Līdz ar to $S_{CED} = \frac{1}{2} ED \cdot CD = \frac{1}{2}(1-x) \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.



2. att.

Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
Izsaka nogriežņus CE un ED, lai parādītos tikai viens nezināms lielums (var nebūt x, bet AE)	2
Uzraksta Pitagora teorēmu ΔCDE	1
Iegūst vienādojumu ar vienu nezināmo	1
Atrisina vienādojumu un iegūst $AE = \frac{1}{4}$ (vērtējums netika samazināts, ja ieguva iracionālu vienādojumu, kuram neveica sakņu pārbaudi)	3
Aprēķina ED garumu	1
Aprēķina S_{CED} (pareiza formula un pareizs skaitlisks rezultāts)	1+1
Ja uzminētas pareizas nogriežņu vērtības un pareizi aprēķināts laukums	2
Ja uzminētas pareizas nogriežņu vērtības, pārbaudīts Pitagora teorēmas nosacījums un pareizi aprēķināts laukums	4

9.4. Atrast mazāko naturālo skaitli k, kuram izpildās sekojoša īpašība: nevienam pirmskaitlim p skaitlis $p+1$ nav naturāla skaitļa k-tā pakāpe.

Atrisinājums. Pamatosim, ka mazākā derīgā vērtība ir $k=4$.

Vērtība $k=1$ neder, jo, piemēram, ja $p=2$, tad $p+1=3=3^1$.

Vērtība $k=2$ neder, jo, piemēram, ja $p=3$, tad $p+1=4=2^2$.

Vērtība $k=3$ neder, jo, piemēram, ja $p=7$, tad $p+1=8=2^3$.

Pamatosim, ka vērtība $k=4$ der.

Pieņemsim pretējo – ir tāds pirmskaitlis p, ka $p+1=n^4$, kur n – naturāls skaitlis, kas lielāks nekā 1. Tādā gadījumā $p=n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)=(n-1)(n+1)(n^2+1)$. Bet jebkurai naturālai n vērtībai, kas lielāk nekā 1, šis skaitlis ir salikts un nevar būt pirmskaitlis. Tātad jebkurai pirmskaitļa p vērtībai skaitlis $p+1$ nav naturāla skaitļa ceturtā pakāpe.

Par pretpiemēru, ka $k=1$ neder	1
Par pretpiemēru, ka $k=2$ neder	1
Par pretpiemēru, ka $k=3$ neder	1
Par atbildi $k=4$	1
Pieņem pretējo, ka $p+1=n^4$	1
Izsaka, ka $p=n^4-1$	1
Sadala reizinātājos $n^4-1=(n-1)(n+1)(n^2+1)$ vai arī $n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)$ un pamato, ka $n^2-1>1$, jo $n>1$	3
Secina, ka p ir salikts skaitlis un iegūta pretruna	1

9.5. Doti 120 dažādi naturāli skaitļi, tie sadalīti pa pāriem tā, ka katrā pārī skaitļu summa ir lielāka nekā 1000. Pierādīt, ka, ja šos dotos 120 skaitļus uzrakstītu rindā augošā secībā, tad 22. un 99. skaitļa summa arī būtu lielāka nekā 1000.

Atrisinājums. Apzīmēsim visus skaitļus augošā secībā ar $a_1; a_2; \ldots; a_{120}$. Pieņemsim pretējo, ka $a_{22}+a_{99} \leq 1000$. Tas nozīmē, ka katrs no 22 skaitļiem $a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_{22}$ sākumā varēja būt pārī tikai ar kādu no skaitļiem, kas ir lielāks nekā a_{99}. Bet tādu skaitļu ir tikai 21 ($a_{100};\ a_{101};\ \ldots;\ a_{120}$), iegūta pretruna. Tātad $a_{22}+a_{99} > 1000$.

Ievieš apzīmējumus	1
Pieņem pretējo, ka $a_{22}+a_{99} \leq 1000$	3
Secina, ka katrs no 22 skaitļiem $a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_{22}$ sākumā varēja būt pārī tikai ar kādu no skaitļiem, kas ir lielāks nekā a_{99}	4
Pamato, ka ir iegūta pretruna	2
Par konkrētiem piemēriem	1
Ja ir konkrēti piemēri un dažas idejas, par ko dod punktus, tad punktu skaitu summē	

10. klase

10.1. Maruta un Elīna raksta olimpiādes uzdevuma atrisinājumu. Maruta sāka rakstīt atrisinājumu, pēc tam, kad viņa bija rakstījusi 1 h un 12 min, Elīna turpināja rakstīt risinājumu un pēc 3 h to pabeidza. Cik ilgā laikā uzdevuma atrisinājumu varētu uzrakstīt Maruta un Elīna, strādājot atsevišķi, ja zināms, ka Elīnai nepieciešams par 2 h vairāk laika atrisinājuma uzrakstīšanai nekā Marutai?

Atrisinājums. Ar x apzīmējam stundu skaitu, kas nepieciešams Marutai, lai uzrakstītu uzdevuma atrisinājumus. Tādā gadījumā Elīnai nepieciešamas $x+2$ stundas. Tā kā Maruta rakstīja atrisinājumu 1 h 12 min jeb 1,2 h, tad viņa izdarīja $\frac{1,2}{x}$ no visa darba, bet Elīna, strādājot 3 h, izdarīja $\frac{3}{x+2}$ no visa darba. Tā kā tika izdarīts viss darbs, tad iegūstam vienādojumu

$$\frac{1,2}{x}+\frac{3}{x+2}=1$$

Reizinot abas vienādojuma puses ar $5x(x+2)\neq 0$, iegūstam vienādojumu

$$6(x+2)+15x=5x(x+2);$$

$$5x^2-11x-12=0.$$

Līdz ar to $x_1=\frac{11+\sqrt{121+240}}{10}=\frac{11+19}{10}=3$ un $x_2=\frac{11-19}{10}=-0,8$ (neder).

Esam ieguvuši, ka, atsevišķi strādājot, Maruta var uzrakstīt atrisinājumu 3 stundās, bet Elīna – 5 stundās.

Piezīme. Uzdevumu var risināt, sastādot vienādojumu sistēmu.

Apzīmē stundu skaitu, kas nepieciešams Marutai un Elīnai, lai atsevišķi veiktu darbu	1
Izsaka, kādu darba daļu katra veica ($\frac{1,2}{x}$ un $\frac{3}{x+2}$)	1+1
Iegūst daļveida vienādojumu	1
Risinot vienādojumu, ņem vērā definīcijas kopu $x(x+2)\neq 0$	1
Atrisina vienādojumu	3
Secina, ka negatīvā sakne neder	1
Uzraksta atbildi	1
Risinot vienādojumu, ir skaitliska kļūda, kas būtiski neietekmē risinājumu	Ne vairāk kā 9
Nepareizi sastādīts vienādojums	Ne vairāk kā 3

10.2. Aplūkosim funkcijas $y = ax^2 + 2x + 2b$, kuru koeficienti a un b ir reāli skaitļi, kurus saista sakarība $a + 18b = 2021$. Pierādīt, ka visu šo funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti.

Atrisinājums. Pamatosim, ka visu aplūkoto funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti:

- ja $x = \frac{1}{3}$, tad $y = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} + 2b = \left(\frac{1}{9}a + 2b\right) + \frac{2}{3} = \frac{1}{9}(a + 18b) + \frac{2}{3} = \frac{2021}{9} + \frac{2}{3} = \frac{2027}{9}$;
- ja $x = -\frac{1}{3}$, tad $y = a \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} + 2b = \left(\frac{1}{9}a + 2b\right) - \frac{2}{3} = \frac{1}{9}(a + 18b) - \frac{2}{3} = \frac{2021}{9} - \frac{2}{3} = \frac{2015}{9}$.

Tātad punkti $\left(\frac{1}{3};\ \frac{2027}{9}\right)$ un $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{2015}{9}\right)$ ir kopīgi visu doto funkciju grafikiem.

Pamatots, ka punkts $\left(\frac{1}{3};\ \frac{2027}{9}\right)$ ir kopīgs visu funkciju grafikiem	5
Pamatots, ka punkts $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{2015}{9}\right)$ ir kopīgs visu funkciju grafikiem	5
Ja ir aritmētiska kļūda, kas nemaina risinājumu pēc būtības	Ne vairāk kā 9
Ja x vietā liek vērtības, kas atšķiras no $\frac{1}{3}$ vai $-\frac{1}{3}$	0
Ja risinājums ir **iesākts, bet nav prasts novest līdz galam**	
Par konkrētu a un b vērtību ievietošanu un divu funkciju uzrakstīšanu sistēmā	4
Sākta risināt iegūtā sistēma, bet nav pareizi atrisināta	1

10.3. Kvadrāta $ABCD$, kura malas garums ir 1, malas AB viduspunkts ir E un malas BC viduspunkts ir F. Nogrieznis AF krusto ED un EC attiecīgi punktos G un H, bet FD un EC krustojas punktā I. Aprēķināt četrstūra $DGHI$ laukumu.

1. atrisinājums. Ievērojam, ka $S_{EHD} = S_{BDE} - S_{BHE}$ (skat. 3. att.). Aprēķinām atbilstošo trijstūru laukumus:

- $S_{BDE} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$;
- $\Delta BHE \sim \Delta DHC$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle BHE = \sphericalangle DHC$ kā krustleņķi un $\sphericalangle EBH = \sphericalangle HDC = 45°$. Līdzīgu trijstūru atbilstošie elementi ir proporcionāli, tāpēc $\frac{HH_1}{HH_2} = \frac{BE}{CD} = \frac{1}{2}$. Tātad $HH_1 = \frac{1}{3}$ un $S_{BHE} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot HH_1 = \frac{1}{12}$.

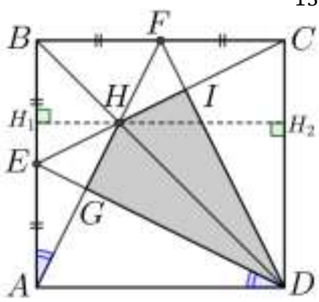
Līdz ar to $S_{EHD} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.

Tā kā $AB = AD = 1$, $BF = EA = \frac{1}{2}$ un $\sphericalangle ABF = \sphericalangle EAD = 90°$, tad $\Delta ABF = \Delta DAE$ pēc pazīmes $m\ell m$. Līdz ar to $\Delta EGA \sim \Delta EAD$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle EAG = \sphericalangle EDA$ kā vienādu trijstūru atbilstošie leņķi un $\sphericalangle AED$ ir kopīgs. Tāpēc $\frac{EA}{AD} = \frac{EG}{AG} = \frac{1}{2}$, no kurienes izriet, ka $AG = 2EG$.

Līdzīgi iegūstam, ka $\Delta AGD \sim \Delta EAD$ pēc pazīmes $\ell\ell$, jo $\sphericalangle AGD = \sphericalangle EAD = 90°$, jo $\Delta EGA \sim \Delta EAD$, un $\sphericalangle EDA$ ir kopīgs. Tāpēc $\frac{EA}{AD} = \frac{AG}{GD} = \frac{1}{2}$, no kurienes izriet, ka $GD = 2AG$. Tātad $GD = 2AG = 2 \cdot 2EG = 4EG$.

Trijstūriem EHG un GHD ir kopīgs augstums, tāpēc to laukumu attiecība ir $\frac{S_{EHG}}{S_{GHD}} = \frac{EG}{GD} = \frac{1}{4}$.

Līdz ar to $S_{GHD} = \frac{4}{5} S_{EHD} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{15}$ un simetrijas dēļ $S_{DGHI} = 2 \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$.



3. att.

1. atrisinājums	
Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
Iegūst, ka $S_{EHD} = \frac{1}{6}$	3
Iegūst, ka $S_{GHD} = \frac{2}{15}$	5
Aprēķina prasīto laukumu	2

2. atrisinājums. Izmantosim koordinātu metodi. Novietojam kvadrātu koordinātu sistēmas 1. kvadrantā tā, lai kvadrāta virsotne A sakrīt ar koordinātu sākumpunktu un malas AB un AD atrodas uz koordinātu asīm (skat. 4. att.). Nosakām punktu koordinātas $A(0;0)$, $C(1;1)$, $F\left(\frac{1}{2};1\right)$, $D(1;0)$, $E\left(0;\frac{1}{2}\right)$ un sastādām taišņu vienādojumus $(AF)\ y=2x$, $(ED)\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ un $(EC)\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Lai noteiktu punktu G un H koordinātas, pielīdzinām atbilstošo taišņu formulu labās puses:

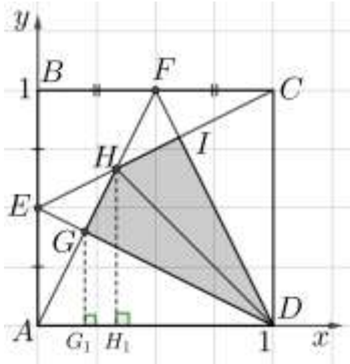
- $G=AF\cap ED$, tad $2x=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, tātad $x=\frac{1}{5}$ un $G\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$;
- $H=AF\cap EC$, tad $2x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, tātad $x=\frac{1}{3}$ un $H\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Aprēķinām trijstūra HGD laukumu:

$$S_{HGD}=S_{AHD}-S_{AGD}=\frac{1}{2}AD\cdot HH_1-\frac{1}{2}AD\cdot GG_1=\frac{1}{2}\left(1\cdot\frac{2}{3}-1\cdot\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{15}=\frac{2}{15}.$$

Simetrijas dēļ $S_{DGHI}=2\cdot\frac{2}{15}=\frac{4}{15}$.

Piezīme. Var pamatot un izmantot, ka $ED\perp AF$.



4. att.

2. atrisinājums	
Par zīmējumu, kurā attēlots tikai dotais	0
Ievieš koordinātu plakni un nosaka vajadzīgo punktu koordinātas	1
Uzraksta taišņu vienādojumus	1+1+1
Nosaka punkta G koordinātas	2
Nosaka punkta H koordinātas	2
Aprēķina prasīto laukumu	2

10.4. Pierādīt, ka nevienai naturālai n vērtībai izteiksmes $n^2 - n + 36$ vērtība nedalās ar **a)** 165; **b)** 169.

a) 1. atrisinājums. Ievērojam, ka $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$. Pamatosim, ka dotā izteiksme nedalās ar 5.

n (mod 5)	n^2 (mod 5)	$n^2 - n + 36$ (mod 5)
0	0	$0 - 0 + 36 \equiv 1$
1	1	$1 - 1 + 36 \equiv 1$
2	4	$4 - 2 + 36 = 38 \equiv 3$
3	$9 \equiv 4$	$4 - 3 + 36 = 37 \equiv 2$
4	$16 \equiv 1$	$1 - 4 + 36 = 33 \equiv 3$

Esam ieguvuši, ka izteiksme $n^2 - n + 36$ nedalās ar 5 (jo tā ir kongruenta ar 1, 2 vai 3 pēc moduļa 5), tātad tā nedalās arī ar 165.

Piezīme. Kongruenču vietā var apskatīt skaitļus n formā $5k; 5k+1; 5k+2; 5k+3; 5k+4$, kur $k = 0; 1; 2; \ldots$, un pierādīt, ka dotā izteiksme nedalās ar 5.

Piemēram, ja $n = 5k + 1$, tad

$$n^2 - n + 36 = (5k+1)^2 - (5k+1) + 36 = 25k^2 + 10k + 1 - 5k - 1 + 36 = 5(5k^2 + k + 7) + 1.$$

Līdzīgi apskata citus gadījumus.

a) 2. atrisinājums. Ievērojam, ka $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$ un ka visām n vērtībām izteiksme $n^2 - n = n(n-1)$ ir pāra skaitlis kā divu secīgu skaitļu reizinājums. Tā kā reizinājuma pēdējo ciparu nosaka katra reizinātāj pēdējais cipars, tad apskatām visas iespējas.

$n-1$ **pēdējais cipars**	n **pēdējais cipars**	$n(n-1)$ **pēdējais cipars**	$n^2 - n + 36$ **pēdējais cipars**
0	1	0	6
1	2	2	8
2	3	6	2
3	4	2	8
4	5	0	6
5	6	0	6
6	7	2	8
7	8	6	2
8	9	2	8
9	0	0	6

Nevienā no gadījumiem izteiksmes $n^2 - n + 36$ pēdējais cipars nav ne 0, ne 5, tātad dotā izteiksme nedalās ar 5, līdz ar to tā nedalās arī ar 165.

b) Pārveidojam izteiksmi formā $n^2 - n + 36 = (n-7)^2 + 13(n-1)$. Ja izteiksme dalītos ar 169, tad tā dalītos arī ar 13, jo $169 = 13^2$. Tā kā pārveidotās izteiksmes otrais saskaitāmais jau dalās ar 13, tad arī pirmajam saskaitāmajam $(n-7)^2$ jādalās ar 13. Tā kā 13 ir pirmskaitlis, tad $n - 7$ ir jādalās ar 13. Bet tad $(n-7)^2$ dalās ar 169. Lai ar 169 dalītos visa sākotnējā izteiksme, tad arī $n - 1$ ir jādalās ar 13.

Esam ieguvuši, ka vienlaikus gan $n - 7$, gan $n - 1$ jādalās ar 13. Bet tad arī šo skaitļu starpībai $(n-1) - (n-7) = 6$ būtu jādalās ar 13, kas nav iespējams. Esam ieguvuši pretrunu, tātad dotā izteiksme nevienai n vērtībai ar 169 nedalās.

Par **a)** gadījumu (kopā 5 punkti)	
Ideja, ka jāizmanto dalāmība ar 5 vai pēdējais cipars	2
Pamato, ka dotā izteiksme nedalās ar 165	3
Par **b)** gadījumu (kopā 5 punkti)	
Atdala pilno kvadrātu vai citādi iegūst, ka $(n-7)^2$ jādalās ar 13	2
Iegūst pretrunu un secina, ka dotā izteiksme nedalās ar 169	3
Ja vispārīgā pierādījuma nav, bet sistemātiski analizēti vairāki konkrēti piemēri	Ne vairāk kā 2

10.5. Doti 500 dažādi naturāli skaitļi, tie sadalīti pa pāriem tā, ka katrā pārī skaitļu summa ir lielāka nekā 2000. Pierādīt, ka, ja šos 500 dotos skaitļus uzrakstītu rindā augošā secībā, tad 146. un 376. skaitļu summa būtu lielāka nekā 2021.

Atrisinājums. Apzīmējam visus skaitļus augošā secībā ar $a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_{500}$. Vispirms pierādīsim, ka $a_{125} + a_{376} > 2000$. Pieņemsim pretējo, ka $a_{125} + a_{376} \leq 2000$. Tas nozīmē, ka katrs no 125 skaitļiem $a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_{125}$ sākumā varēja būt pārī tikai ar kādu no skaitļiem, kas ir lielāks nekā a_{376}. Bet tādu skaitļu ir tikai 124 ($a_{377};\ a_{378};\ \ldots;\ a_{500}$) – pretruna.

Tā kā visi dotie skaitļi ir dažādi un naturāli, tad

$$a_{146} \geq a_{145} + 1 \geq a_{144} + 2 \geq a_{143} + 3 \geq \ldots \geq a_{125} + 21.$$

Tātad $a_{146} + a_{376} \geq a_{125} + a_{376} + 21 > 2000 + 21 = 2021$.

Pamato, ka $a_{125} + a_{376} > 2000$	6
Pamato, ka $a_{146} \geq a_{125} + 21$	2
Pamato, ka $a_{146} + a_{376} > 2021$	2
Par konkrētiem piemēriem	Ne vairāk kā 2

11.1. Dota aritmētiskā progresija un ģeometriskā progresija, kurām abām pirmais loceklis ir 2. Aritmētiskās progresijas otrais loceklis ir par 0,25 lielāks nekā ģeometriskās progresijas otrais loceklis, bet trešais loceklis abām progresijām ir vienāds. Aprēķināt aritmētiskās progresijas pirmo piecu locekļu summu.

1. atrisinājums. Ņemot vērā pieņemtos apzīmējumus progresijām, uzdevumā dotos nosacījumus varam pierakstīt kā $a_1 = b_1 = 2$, $a_2 = b_2 + 0{,}25$ un $a_3 = b_3$.

Pēc aritmētiskās progresijas un ģeometriskās progresijas definīcijas iegūstam, ka

- $a_2 = a_1 + d = 2 + d$ un $a_3 = a_2 + d = 2 + 2d$;
- $b_2 = b_1 q = 2q$ un $b_3 = b_2 q = 2q^2$.

Līdz ar to iegūstam vienādojumu sistēmu (no vienādībām $a_2 = b_2 + 0{,}25$ un $a_3 = b_3$):

$$\begin{cases} 2 + d = 2q + 0{,}25 \\ 2 + 2d = 2q^2 \end{cases}$$

No pirmā vienādojuma izsakot $d = 2q - 1{,}75$ un ievietojot to otrajā vienādojumā, iegūstam

$$2 + 2(2q - 1{,}75) = 2q^2;$$

$$2q^2 - 4q + 1{,}5 = 0;$$

$$4q^2 - 8q + 3 = 0.$$

Vienādojuma saknes ir $q_1 = \frac{8+\sqrt{16}}{8} = \frac{12}{8} = 1{,}5$ un $q_1 = \frac{8-4}{8} = 0{,}5$.

Attiecīgi $d_1 = 3 - 1{,}75 = 1{,}25$ un $d_2 = 1 - 1{,}75 = -0{,}75$.

Apskatām abus gadījumus:

- ja $d = 1{,}25$, tad aritmētiskās progresijas pirmo piecu locekļu $(2;\ 3{,}25;\ 4{,}5;\ 5{,}75;\ 7)$ summa ir
$$S_5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = \frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot 1{,}25}{2} \cdot 5 = \frac{4+5}{2} \cdot 5 = 22{,}5;$$
- ja $d = -0{,}75$, tad aritmētiskās progresijas pirmo piecu locekļu $(2;\ 1{,}25;\ 0{,}5;\ -0{,}25;\ -1)$ summa ir
$$S_5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = \frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot (-0{,}75)}{2} \cdot 5 = \frac{4-3}{2} \cdot 5 = 2{,}5.$$

2. atrisinājums. Tā kā dota aritmētiskā progresija $2;\ a_2;\ a_3$, tad $a_2 - 2 = a_3 - a_2$ un $a_3 = 2a_2 - 2$.

No ģeometriskās progresijas $2;\ b_2;\ b_3$, iegūstam sakarības $\frac{b_2}{2} = \frac{b_3}{b_2}$ un $b_3 = \frac{b_2^2}{2}$.

Sastādām vienādojumu $2a_2 - 2 = \frac{b_2^2}{2}$.

Ja $b_2 = x$, tad $a_2 = x + 0{,}25$, līdz ar to esam ieguvuši vienādojumu

$$2(x + 0{,}25) - 2 = \frac{x^2}{2};$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

kura saknes ir $x_1 = 1$ un $x_2 = 3$. Tad $a_2 = 1{,}25$ un $a_2 = 3{,}5$. Līdz ar to diferences ir $d_1 = -0{,}75$ un $d_2 = 1{,}5$.

Apskatām abus gadījumus:

- ja $d = 1{,}25$, tad aritmētiskās progresijas pirmo piecu locekļu (2; 3,25; 4,5; 5,75; 7) summa ir $S_5 = 2 + 3{,}25 + 4{,}5 + 5{,}75 + 7 = 22{,}5$;
- ja $d = -0{,}75$, tad aritmētiskās progresijas pirmo piecu locekļu $(2;\ 1{,}25;\ 0{,}5;\ -0{,}25;\ -1)$ summa ir $S_5 = 2 + 1{,}25 + 0{,}5 - 0{,}25 - 1 = 2{,}5$.

Iegūst vienādojumu $2 + d = 2q + 0{,}25$ vai izsaka $a_3 = 2a_2 - 2$	2
Iegūst vienādojumu $2 + 2d = 2q^2$ vai izsaka $b_3 = \frac{b_2^2}{2}$	2
Atrisina vienādojumu sistēmu vai vienādojumu un iegūst diferences d vērtības	4
Aprēķina S_5, ja $d = 1{,}25$ (ar formulu vai saskaitot)	1
Aprēķina S_5, ja $d = -0{,}75$ (ar formulu vai saskaitot)	1
Risinājumā ir aritmētiska kļūda, kas būtiski neietekmē risinājumu	Ne vairāk kā 9

11.2. Doti tādi skaitļi a, b un c, ka $a + c = \frac{b}{2021}$, turklāt neviens no skaitļiem $a,\ b,\ c$ nav 0. Pierādīt, ka vienādojumam $ax^2 + bx + c = 0$ ir sakne, kas atrodas intervālā $[-1; 1]$.

Atrisinājums. Apskatām funkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ievērojam, ka funkcijas vērtībām $f(-1)$ un $f(1)$ ir pretējas zīmes:

- $f(-1) = a - b + c = \frac{b}{2021} - b = -\frac{2020}{2021} \cdot b$;
- $f(1) = a + b + c = \frac{b}{2021} + b = \frac{2022}{2021} \cdot b$.

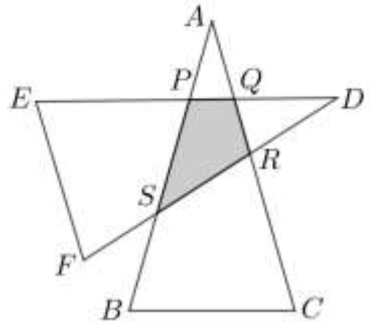
Tātad intervālā $[-1;\ 1]$ funkcijas grafiks krusto x asi, līdz ar to dotajam vienādojumam ir sakne, kas atrodas intervālā $[-1; 1]$.

Piezīme. Var uzreiz apskatīt reizinājumu:

$$f(-1)f(1) = (a + c - b)(a + c + b) = (a + c)^2 - b^2 = \frac{b^2}{2021^2} - b^2 < 0.$$

Aprēķina $f(-1)$	1
Izmantojot doto vienādību, iegūst, ka $f(-1) = -\frac{2020}{2021} \cdot b$	2
Aprēķina $f(1)$	1
Izmantojot doto vienādību, iegūst, ka $f(1) = \frac{2022}{2021} \cdot b$	2
Secina, ka $f(-1)$ un $f(1)$ ir pretējas zīmes	2
Secina, ka vienādojumam ir sakne, kas atrodas intervālā $[-1; 1]$	2
Par konkrētiem piemēriem	Ne vairāk kā 2

11.3. Divi vienādi vienādsānu trijstūri ABC un DEF ($AB = AC = DE = DF$ un $BC = EF$) krustojoties veido četrstūri $PQRS$ (skat. 5. att.), kuram var apvilkt riņķa līniju. Pierādīt, ka divi no četrstūra $PQRS$ leņķiem ir taisni.



5. att.

Atrisinājums. No trijstūriem ASR un DPS attiecīgi iegūstam, ka

- $\sphericalangle ARS = 180° - \sphericalangle PSR - \sphericalangle SAR$;
- $\sphericalangle DPS = 180° - \sphericalangle PSR - \sphericalangle PDS$.

Pēc dotā $\sphericalangle SAR = \sphericalangle PDS$ (jo trijstūri ir vienādi), tad arī $\sphericalangle ARS = \sphericalangle DPS$. Tā kā četrstūrim $PQRS$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\sphericalangle ARS + \sphericalangle DPS = 180°$, tātad $\sphericalangle ARS = \sphericalangle DPS = 90°$.

Pamato, ka $\sphericalangle ARS = \sphericalangle DPS$ (var arī apzīmējot leņķus)	7
Izmanto, ka ievilkta četrstūra pretējo leņķu summa ir 180°	1
Iegūst, ka $\sphericalangle ARS = \sphericalangle DPS = 90°$	2

11.4. Naturālu skaitli sauksim par *tīri jauku*, ja to iespējams izteikt formā $a \cdot b + c \cdot d$, kur a, b, c, d – dažādi naturāli skaitļi, kas lielāki nekā 1. Piemēram, skaitlis 100 ir *tīri jauks*, jo $100 = 7 \cdot 10 + 5 \cdot 6$. Pierādīt, ka jebkuru divu *tīri jauku* skaitļu summa arī ir *tīri jauks* skaitlis.

Atrisinājums. Aplūkosim, kāds ir mazākais *tīri jaukais* skaitlis. Tā kā *tīri jaukos* skaitļus raksturo īpašība "jo lielāka sastāvdaļa, jo lielāks rezultāts", tad mazāko no šādiem skaitļiem var veidot tikai mazākais iespējamais dažādo skaitļu komplekts, tie ir skaitļi 2, 3, 4, 5.

No šiem skaitļiem var izveidot tikai šādus skaitļus:

- $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 26$,
- $2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 23$,
- $2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 22$.

Tātad mazākais tīri jaukais skaitlis ir 22, un divu *tīri jauko* skaitļu summa ir vismaz 44.

Pierādīsim, ka visi skaitļi, kas lielāki vai vienādi ar 44, ir *tīri jauki*.

- Visus pāra skaitļus, kas ir lielāki vai vienādi ar 22, var uzrakstīt formā $2 \cdot p + 3 \cdot 4$, kur $p \geq 5$. Tā kā visi četri skaitļi 2, 3, 4 un p ir dažādi, tad visi pāra skaitļi, kas ir vismaz 22, ir *tīri jauki*.
- Visus nepāra skaitļus, kas ir lielāki vai vienādi ar 27, var uzrakstīt formā $2 \cdot p + 3 \cdot 5$, kur $p \geq 6$. Tā kā visi četri skaitļi 2, 3, 5 un p ir dažādi, tad visi nepāra skaitļi, kas ir vismaz 27, ir *tīri jauki*.

Tātad visi skaitļi, kas lielāki vai vienādi ar 27, ir *tīri jauki*. Līdz ar to arī visi skaitļi, kas lielāki vai vienādi ar 44, ir *tīri jauki* un esam pierādījuši, ka jebkuru divu *tīri jauku* skaitļu summa arī ir *tīri jauks* skaitlis.

Pamato, ka 22 ir mazākais *tīri jaukais* skaitlis	2
Secina, ka divu *tīri jauko* skaitļu summa ir vismaz 44	1
Pamato, ka visi pāra skaitļi, kas ir vismaz 22, ir *tīri jauki*	3
Pamato, ka visi nepāra skaitļi, kas ir vismaz 27, ir *tīri jauki*	3
Secina, ka jebkuru divu *tīri jauku* skaitļu summa arī ir *tīri jauks* skaitlis	1
Par konkrētiem piemēriem	Ne vairāk kā 2

11.5. Šaha turnīrā katrs dalībnieks ar katru izspēlēja tieši vienu partiju. Katrā partijā par uzvaru tiek piešķirts 1 punkts, par neizšķirtu tiek piešķirti 0,5 punkti, par zaudējumu – 0 punkti. Turnīra beigās izrādījās, ka katra dalībnieka uzvaru skaits nepārsniedz tā neizšķirtu skaitu un nav divu dalībnieku, kuri kopsummā būtu ieguvuši vienādu punktu skaitu. Vai iespējams, ka turnīrā piedalījās **a)** 15 dalībnieki, **b)** 16 dalībnieki?

Atrisinājums. a) Jā, ir iespējams. Apzīmējam dalībniekus ar $d_1, d_2, \ldots, d_{15}$, tad iespējams, ka dalībnieks d_1 ir ieguvis 3,5 punktus, d_2 – 4 punktus, ..., d_{15} ir ieguvis 10,5 punktus. Tas iespējams, ja viņi ir spēlējuši, piemēram, šādi (skat. tabulu). Partijas, kurās spēlē dalībnieki ar dažādas paritātes numuriem, ir beigušās neizšķirti, bet partijās, kurās spēlē dalībnieki ar vienādas paritātes numuriem, ir uzvarējis dalībnieks ar lielāko numuru. Redzams, ka katrs dalībnieks vismaz pusi partiju ir spēlējis neizšķirti, tātad tā uzvaru skaits nepārsniedz neizšķirtu skaitu.

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	**Uzvaras**	**Neizšķirts**	**Punkti**
d_1		0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0	7	3,5
d_2	0,5		0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	8	4
d_3	1	0,5		0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	1	7	4,5
d_4	0,5	1	0,5		0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	1	8	5
d_5	1	0,5	1	0,5		0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	2	7	5,5
d_6	0,5	1	0,5	1	0,5		0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	2	8	6
d_7	1	0,5	1	0,5	1	0,5		0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	0	3	7	6,5
d_8	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5		0,5	0	0,5	0	0,5	0	0,5	3	8	7
d_9	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5		0,5	0	0,5	0	0,5	0	4	7	7,5
d_{10}	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5		0,5	0	0,5	0	0,5	4	8	8
d_{11}	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5		0,5	0	0,5	0	5	7	8,5
d_{12}	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5		0,5	0	0,5	5	8	9
d_{13}	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5		0,5	0	6	7	9,5
d_{14}	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5		0,5	6	8	10
d_{15}	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5		7	7	10,5

b) Nē, nav iespējams. Apzīmēsim dalībnieku iegūto punktu skaitu augošā secībā ar $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$. Ievērojam, ka $a_{16} \leq 11$ (7 uzvaras un 8 neizšķirti), jo pretējā gadījumā šī dalībnieka uzvaru skaits pārsniegtu neizšķirtu skaitu. Attiecīgi $a_{15} \leq 10{,}5$; $a_{14} \leq 10$; ... ; $a_1 \leq 3{,}5$. Tātad visu dalībnieku kopējais iegūtais punktu skaits nepārsniedz

$$11 + 10{,}5 + 10 + 9{,}5 + \ldots + 3{,}5 = 116.$$

Bet kopā turnīrā tika izspēlētas $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$ partijas un katrā partijā izcīnīts viens punkts , tātad kopējam punktu skaitam jābūt tieši 120, iegūta pretruna.

Par atbildi a) jā un b) nē	1
Par **a)** gadījumu (kopā 4 punkti)	
Par derīgu piemēru	4
Par **b)** gadījumu (kopā 5 punkti)	
Aprēķināts kopējais punktu skaits ir 120	1
Pamatots, ka turnīrā nevarēja piedalīties 16 dalībnieki	4

12.1. Pa 4,5 km garu trasi, kurai ir riņķa līnijas forma, ar sniega motocikliem brauc Māris un Mārtiņš. Māris sekundē nobrauc par 1 metru vairāk nekā Mārtiņš, tāpēc visu trasi veic par 50 sekundēm ātrāk nekā Mārtiņš. Ar kādu ātrumu brauc Māris un Mārtiņš?

Atrisinājums. Ar x apzīmējam ātrumu, ar kādu brauc Māris, tad Mārtiņa braukšanas ātrums ir $x-1$. Māris trasi veica $\frac{4500}{x}$ sekundēs, bet Mārtiņš trasi veica $\frac{4500}{x-1}$ sekundēs. Tā kā Māris nobrauca trasi par 50 sekundēm ātrāk nekā Mārtiņš, tad iegūstam vienādojumu

$$\frac{4500}{x-1}-\frac{4500}{x}=50.$$

Reizinot abas vienādojuma puses ar $\frac{1}{50}x(x-1)\neq 0$, iegūstam vienādojumu

$$90x-90(x-1)=x(x-1),$$
$$x^2-x-90=0,$$

kura saknes ir $x_1=10$ un $x_2=-9$ (neder). Esam ieguvuši, ka Māris brauca ar ātrumu 10 m/s un Mārtiņš brauca ar ātrumu 9 m/s.

Piezīmes

1. Var apzīmēt arī laiku (cik ilgā katrs veic visu trasi) y un $y-50$, tad iegūst vienādojumu

$$\frac{4500}{y-50}-\frac{4500}{y}=1,$$

kura saknes ir $y_1=-450$ (neder) un $y_2=500$ sekundes. Pēc tam aprēķina braucēju ātrumus.

2. Ja ātrumu rēķina km/h, tad braucēju ātrumi attiecīgi ir 36 km/h un 32,4 km/h.

Apzīmē abu braucēju ātrumus	1
Izsaka, cik sekundēs katrs braucējs veica trasi	1+1
Iegūst daļveida vienādojumu	1
Risinot vienādojumu, ņem vērā definīcijas kopu $x(x-1)\neq 0$	1
Atrisina vienādojumu	3
Secina, ka negatīvā sakne neder	1
Uzraksta atbildi	1
Risinot vienādojumu, ir aritmētiska kļūda, kas būtiski neietekmē risinājumu	Ne vairāk kā 9
Nepareizi sastādīts vienādojums (arī tad, ja nav saskaņotas mērvienības)	Ne vairāk kā 3
Ja uzminētas vērtības un veikta pārbaude	2
Veikta pilna pārlase (kaut ar naturāliem skaitļiem) un atrastas derīgās vērtības	4

12.2. Dots, ka $8ac + 2bc + c^2 < 0$. Pierādīt, ka $b^2 - 8ac > 0$.

1. atrisinājums. Aplūkojam kvadrātfunkciju $f(x) = 2ax^2 + bx + c$. Ievērojam, ka

$$8ac + 2bc + c^2 = c(8a + 2b + c) = f(0) \cdot f(2).$$

No dotā izriet, ka $f(0) \cdot f(2) < 0$, tātad kvadrātfunkcija krusto x asi. Līdz ar to kvadrātfunkcijai ir divas saknes un tās diskriminants ir pozitīvs, tas ir, $D = b^2 - 8ac > 0$.

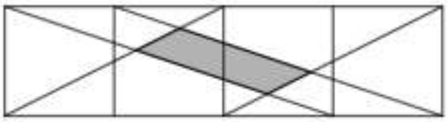
2. atrisinājums. Pārveidojam doto nevienādību:

$$8ac - b^2 + b^2 + 2bc + c^2 < 0;$$
$$(b + c)^2 < b^2 - 8ac.$$

Tā kā $(b + c)^2 \geq 0$, tad $b^2 - 8ac > 0$.

1. atrisinājums	
Apskata kvadrātfunkciju $f(x) = 2ax^2 + bx + c$	1
Pamato, ka $f(0) \cdot f(2) < 0$	5
Secina, ka kvadrātfunkcijas diskriminants ir pozitīvs	2
Iegūst, ka $b^2 - 8ac > 0$	2
2. atrisinājums	
Pārveido doto nevienādību formā $(b + c)^2 < b^2 - 8ac$	7
Izmanto, ka $(b + c)^2 \geq 0$	1
Secina, ka $b^2 - 8ac > 0$	2
Apskatītas konkrētas a, b, c vērtības	Ne vairāk kā 2

12.3. Taisnstūris salikts no četriem vienības kvadrātiem. Aprēķināt iekrāsotā četrstūra (skat. 6. att.) laukumu un leņķus.

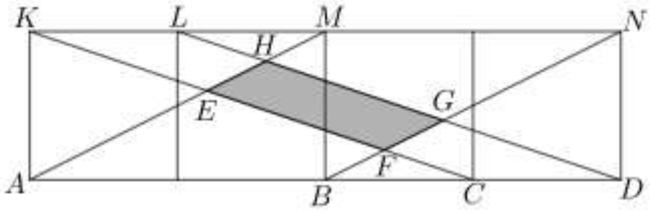


6. att.

1. atrisinājums. Ievērojam, ka iekrāsotais četrstūris ir paralelograms, jo tā pretējās malas ir pa pāriem paralēlas. Tā kā krustleņķi ir vienādi un iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm ir vienādi, tad pēc pazīmes $\ell\ell$ iegūstam līdzīgus trijstūrus:

- $\Delta AEC \sim \Delta MEK$, to līdzības koeficients ir $\frac{KM}{AC} = \frac{2}{3}$ (skat. 7. att.), tātad ΔAEC augstums ir $\frac{3}{5}AK = \frac{3}{5}$, un simetrijas dēļ ΔBGD augstums ir $\frac{2}{5}$;
- $\Delta BFC \sim \Delta NFK$, to līdzības koeficients ir $\frac{BC}{KN} = \frac{1}{4}$, tātad ΔBFC augstums ir $\frac{1}{5}$, un simetrijas dēļ ΔAHD augstums ir $\frac{4}{5}$.

Līdz ar to $S_{EFGH} = S_{AHD} - S_{AEC} - S_{BGD} + S_{BFC} = \frac{1}{2}\left(4 \cdot \frac{4}{5} - 3 \cdot \frac{3}{5} - 2 \cdot \frac{2}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{10}(16 - 9 - 4 + 1) = \frac{2}{5}$.



7. att.

Pēc Pitagora teorēmas trijstūros ABM un LND ieugūstam, ka $AM = \sqrt{AB^2 + MB^2} = \sqrt{5}$ un $LD = \sqrt{LN^2 + ND^2} = \sqrt{10}$.

Ņemot vērā trijstūru līdzību, iegūstam, ka $AH = \frac{4}{5}AM = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ un $HD = \frac{4}{5}LD = \frac{4\sqrt{10}}{5}$.

Izmantojot kosinusu teorēmu trijstūrī AHD, iegūstam

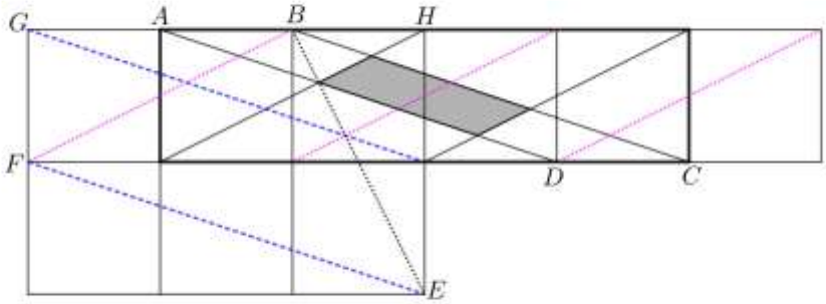
$$AD^2 = AH^2 + HD^2 - 2 \cdot AH \cdot HD \cdot \cos\sphericalangle AHD\,;$$
$$16 = \frac{16}{5} + \frac{32}{5} - \frac{32\sqrt{2}}{5}\cos\sphericalangle AHD\,;$$
$$32\sqrt{2}\cos\sphericalangle AHD = 48 - 80;$$
$$\cos\sphericalangle AHD = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka $\sphericalangle AHD = 135°$ un $\sphericalangle HEF = 45°$.

1. atrisinājums	
Izsaka $S_{EFGH} = S_{AHD} - S_{AEC} - S_{BGD} + S_{BFC}$	1
Aprēķina katra trijstūra laukumu	2
Iegūst, ka $S_{EFGH} = \frac{2}{5}$	2
Aprēķina ΔAHD malas	2
Iegūst, ka $\cos\sphericalangle AHD = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	2
Aprēķina pelēkā paralelograma leņķus	1

2. atrisinājums. Papildinām doto zīmējum ar vēl 4 kvadrātiem un novelkam dotajām taisnēm paralēlas taisnes (skat. 8. att., kur paralēlās taisnes iekrāsotas zila un violetā krāsā). Aprēķinām paralelograma $ABCD$ (jo tā pretējās malas ir pa pāriem paralēlas) laukumu $S_{ABCD} = 1 \cdot 1 = 1$. Ievērojam, ka nogriezni BC krusto paralēlas taisnes, kas atrodas vienādā attālumā viena no otras. Tātad tās sadala nogriezni BC piecās vienādās daļās (Talesa teorēma). Līdz ar to iekrāsotā četrstūra laukums ir $\frac{2}{5} S_{ABCD} = \frac{2}{5}$.

Trijstūris FBE ir vienādsānu taisnleņķa, jo $\Delta FGB = \Delta BHE$ un tie ir taisnleņķa trijstūri. Tātad $\sphericalangle BFE = 45°$. Līdz ar to iekrāsotā četrstūra (paralelograma) leņķu lielumi ir $45°$ (jo leņķi, kuru malas ir paralēlas, ir vienādi) un $135°$.



8. att.

2. atrisinājums	
Pamato, ka $S_{EFGH} = \frac{2}{5}$	5
Pamato, ka $\sphericalangle BFE = 45°$.	4
Aprēķina pelēkā paralelograma leņķus	1

12.4. Doti naturāli skaitļi a un b, kas lielāki nekā 1. Zināms, ka gan a^2+b, gan b^2+a ir pirmskaitļi. Pierādīt, ka $a+b$ un $ab+1$ ir savstarpēji pirmskaitļi.

1. atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka $a+b$ un $ab+1$ abi dalās ar kādu pirmskaitli p. Tādā gadījumā reizinājums $(a^2+b)(a+b^2)=a^3+b^3+a^2b^2+ab=(a+b)(a^2-ab+b^2)+ab(ab+1)$ arī dalās ar p. Tā kā tas ir divu pirmskaitļu reizinājums, tad vai nu $a^2+b=p$, vai arī $a+b^2=p$. Taču gan $a^2+b>a+b$, gan
$a+b^2>a+b$, bet tā kā $a+b$ dalās ar p, tad $a+b\geq p$ – pretruna.

2. atrisinājums. Tā kā a^2+b ir pirmskaitlis, tad tas ir nepāra skaitlis (jo $a,b>1$), līdz ar to skaitļiem a un b ir pretēja paritāte. Pieņemsim pretējo, ka $a+b$ un $ab+1$ abi dalās ar kādu pirmskaitli p. Tā kā $a+b$ (un arī $ab+1$) ir nepāra skaitlis, tad p ir nepāra pirmskaitlis ($p\geq 3$). Tā kā abi skaitļi dalās ar p, tad arī to summa un starpība dalās ar p:

- $ab+1+a+b=(a+1)(b+1)$ dalās ar p;
- $ab+1-(a+b)=(a-1)(b-1)$ dalās ar p.

Pieņemsim, ka $a+1$ dalās ar p (otrs gadījums, kad $b+1$ dalās ar p, ir analoģisks). Tad $a-1$ nedalās ar p, jo, ja dalītos, tad $(a+1)-(a-1)=2$ arī dalītos ar p. Tātad $b-1$ dalās ar p. Bet tādā gadījumā

$$b^2+a=(b-1)(b+1)+(a+1)=p\cdot\left((b+1)\frac{b-1}{p}+\frac{a+1}{p}\right)$$

nav pirmskaitlis – pretruna.

1. atrisinājums	
Pieņem pretējo, ka $a+b$ un $ab+1$ abi dalās ar kādu pirmskaitli p	1
Pārveido reizinājumu $(a^2+b)(a+b^2)=(a+b)(a^2-ab+b^2)+ab(ab+1)$	3
Secina, ka šis reizinājums dalās ar pirmskaitli p	1
Secina, ka tādā gadījumā vai nu $a^2+b=p$, vai arī $a+b^2=p$	2
Iegūst pretrunu	4
2. atrisinājums	
Secina, ka skaitļiem a un b ir pretēja paritāte	1
Pieņem pretējo, ka $a+b$ un $ab+1$ abi dalās ar kādu pirmskaitli p	1
Secina, ka $p\geq 3$	1
Apskata skaitļu $a+b$ un $ab+1$ summu un starpību	1
Iegūst pretrunu	6
Par konkrētiem piemēriem	0

12.5. Taisnstūrveida rūtiņu tabulā ar n rindām un m kolonnām ($n > 1, m > 1$) katrā rūtiņā ierakstīts atšķirīgs naturāls skaitlis. Sākumā rūtiņās ierakstītie skaitļi pa rindām bija sakārtoti augošā secībā (katrā rindā visi skaitļi no katras rūtiņas pa labi ir lielāki, bet pa kreisi – mazāki nekā tajā esošais skaitlis). Pēc tam visas kolonnas sakārtoja augošā secībā (katrā kolonnā visi skaitļi virs katras rūtiņas ir mazāki, bet zem – lielāki nekā tajā esošais skaitlis). Pierādīt, ka pēc pārkārtošanas tabulā ierakstītie skaitļi pa rindām joprojām ir sakārtoti augošā secībā.

1. atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka kāda rinda vairs nav sakārtota augošā secībā. Aplūkosim pirmo nesakārtoto rindu, tās kārtas numuru apzīmēsim ar i. Tas nozīmē, ka visas rindas no pirmās līdz $(i-1)$-ajai ir sakārtotas, bet i-ā rinda nav sakārtota.

Tātad šajā rindā ir divi tādi elementi x_i un y_i, ka x_i atrodas pa kreisi no y_i, bet $x_i > y_i$. Aplūkosim kolonnas X un Y, kurās atrodas attiecīgi x_i un y_i, apzīmēsim to elementus attiecīgi ar x_k un y_k $(1 \le k \le n)$.

Tā kā visas iepriekšējās rindas ir sakārtotas, tad $x_1 < y_1,\ x_2 < y_2,\ \ldots,\ x_{i-1} < y_{i-1}$ (bet $x_i > y_i$). Tā kā kolonnas ir sakārtotas, tad tas nozīmē, ka kolonnā X ir tieši $(i-1)$ skaitlis $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$, kas ir mazāks nekā y_i. Bet katrs no i skaitļiem $y_1, y_2, \ldots, y_i$ sākumā atradās vienā rindā ar kādu skaitli no kolonnas X, kas par to ir mazāks, tātad tādiem skaitļiem jābūt vismaz skaitā i – pretruna.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka arī pēc pārkārtošanas skaitļi pa rindām ir sakārtoti augošā secībā.

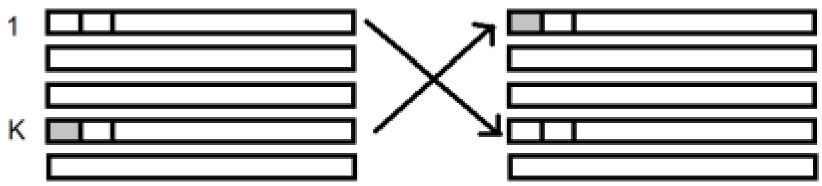
1. atrisinājums	
Pieņem pretējo	1
Apskata pirmo nesakārtoto rindu	2
Secina, ka kolonnā X ir tieši $i-1$ skaitlis, kas ir mazāks nekā y_i	3
Ievēro, ka sākumā katram no i skaitļiem $y_1, \ldots, y_i$ atbilstošais skaitlis kolonnā X bija mazāks nekā y_i	2
Iegūst pretrunu	2
Par konkrētiem piemēriem	Ne vairāk kā 2

2. atrisinājums. Aplūkosim, kā iespējams veikt prasīto skaitļu sakārtošanu pa kolonnām, kārtošanas procesā nepazaudējot sakārtojumu pa rindām. Skaidrs, ka pēc visu kolonnu sakārtošanas pirmajā rindā katrā kolonnā jābūt šīs kolonnas vismazākajam skaitlim.

Aplūkojam sākotnējās tabulas pirmo kolonnu un atrodam tajā vismazāko skaitli.

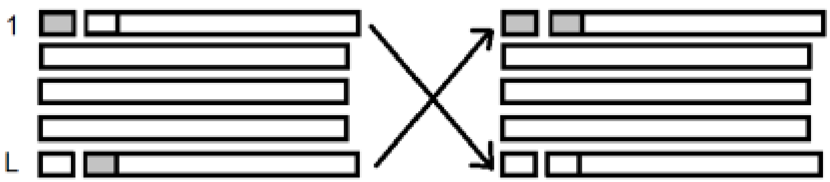
Pieņemsim, ka mazākais skaitlis atrodas K-tajā rindā.

Samainīsim vietām pirmo un K-to rindu (skat. 9. att.). Ja kolonnas mazākais skaitlis jau bija pirmajā rindā, tad šis solis ir jāizlaiž. Esam ieguvuši, ka pirmajā kolonnā mazākais skaitlis atrodas pirmajā rindā un visas rindas joprojām ir sakārtotas augoši (jo katras rindas saturs ir iepriekšējais – mainīta ir tikai to secība).



9. att.

Tagad aplūkojam otro kolonnu. Pieņemsim, ka mazākais skaitlis atrodas L-tajā rindā. Paņemsim 1. un L-tās rindas fragmentus no otrās kolonnas līdz beigām (M-tajai kolonnai) un samainīsim vietām (skat. 10. att.).



10. att.

Pārliecināsimies, ka arī pēc šādas maiņas gan pirmā, gan L-tā rinda joprojām ir sakārtotas augoši.
Neatbilstība var rasties tikai starp rindas pirmo un otro skaitli – tālāk nekas netika mainīts. Pieņemsim, ka pirms maiņas pirmās rindas pirmajā un otrajā kolonnā bija skaitļi p_1 un p_2, bet L-tajā – skaitļi l_1 un l_2. Šiem skaitļiem ir spēkā sakarības: $p_1 < p_2$ un $l_1 < l_2$ (sakārtojums pa rindām) un $p_1 < l_1$ un $l_2 < p_2$ (pirmo divu kolonnu mazākie skaitļi). Tātad ir spēkā arī $p_1 < l_2$ un $l_1 < p_2$, kas nozīmē, ka šo divu fragmentu samainīšana vietām saglabā sakārtojumu pa rindām.
Analoģiski panākam, ka pirmās rindas trešais, ceturtais, …, M-tais skaitlis ir mazākie savā kolonnā, katru reizi samainot vietām rindu fragmentus no vajadzīgās kolonnas līdz rindas beigām, bet skaitļus kolonnās pa kreisi neaiztiekot.
Kad šādi pirmajā rindā augošā secībā esam izvietojuši kolonnu mazākos skaitļus, varam par šo rindu aizmirst un atkārtot tādu pašu sakārtošanas procesu par vienu rindu mazākai tabulai – tai, ko iegūstam paņemot tabulas rindas no otrās līdz N-tajai.
Kad šādi būsim tikuši līdz beigām (pēdējā posmā sakārtojot divas rindas), gan kolonnas, gan rindas būs sakārtotas augošā secībā. Tas nozīmē, ka arī pēc kolonnu sakārtošanas skaitļi tabulas rindās ir sakārtoti.

2. atrisinājums	
Idejas būtības izklāsts (pārkārtošanas procesa ideja)	2
Pierāda īpašību vienai rindai (piemēram, pamato, kā var panākt, ka 1. rindā atrodas katras kolonnas mazākais skaitlis, turklāt sakārtojums pa rindām saglabājas	5
Korekti pamato, ka īpašība saglabājas arī citām rindām	3
Par konkrētiem piemēriem	Ne vairāk kā 2