"Profesora Cipariņa klubs"

3. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Vectēvs Lūcijai uzdāvināja 4 senas eināra monētas. Zināms, ka starp tām viena ir viltota, kuras masa atšķiras no īstas monētas masas. Lūcijai pašai arī ir viena šāda eināra monēta, par kura viņa zina, ka tā nav viltota. Kā ar divām svēršanām uz sviras svariem atrast viltoto monētu starp vectēva uzdāvinātajiem eināriem?

Atrisinājums. Vispirms paņemsim jebkuras divas no uzdāvinātajām monētām un salīdzināsim tās savā starpā. Ja svari ir līdzsvarā, tad šīs divas monētas ir autentiskas un viltotā atrodas starp atlikušajām divām monētām. Gadījumā, ja svari nav līdzsvarā, tad viena no tikko svērtajām monētām ir viltota. Tā kā nav zināms, vai viltotā monēta ir vieglāka vai smagāka par īstu monētu, tad nepieciešama papildu svēršana. Jebkurā gadījumā pēc pirmās svēršanas mēs esam atlasījuši divas monētas, starp kurām atrodas viltotā. Otrajā svēršanā mēs izvēlamies jebkuru no atlasītajām monētām un Lūcijas autentisko monētu. Ja svari nav līdzsvarā, tas nozīmē, ka izvēlētā monēta ir viltota, jo mēs zinām, ka uz otra kausa atrodas Lūcijas īstā monēta. Ja svari nav līdzsvarā, tad tas nozīmē, ka tā monēta, kas tika atstāta malā, būs viltota, jo ar divām svēršanām esam pamatojuši, ka trīs no izvēlētajām monētām ir īstas, bet tā kā ir zināms, ka ir vismaz viena viltota, tad pēdējā ceturtā būs tā.

2. Alvīnei ir 5 monētas, no kurām 2 ir viltotas. Viena no viltotajām monētām ir smagāka nekā īstās, bet otra – vieglāka. Nav zināms, vai tas, par cik viena viltotā monēta ir smagāka nekā īstā, ir tik pat, par cik otra viltotā monēta ir vieglāka nekā īstā. Alvīne ar sviras svariem grib atrast abas viltotās monētas ar 3 svēršanām. Vai viņai tas vienmēr izdosies?

Atrisinājums. Pamatosim, ka tas vienmēr izdosies.

1) Pirmajā svēršanā uz katra kausa novietosim vienu monētu.
    a) Ja svari ir līdzsvarā, tad abas monētas ir īstas. Tas nozīmē, ka abas viltotās ir starp atlikušajām trīs monētām. Mēs varam paņemt jebkuru no tikko noteiktajām īstajām monētām un pa vienam salīdzināt ar atlikušajām monētām. Mums ir tikai divas svēršanas, bet trīs monētas. Ar šo pietiek, lai pilnībā noteiktu pārējās monētas, jo, ja ar divām svēršanām atrodam vienu īstu un vienu viltotu, tad loģiski, ka pēdējā arī būs viltota. Līdzīgi arī pārējos gadījumos. Tātad šajā gadījumā mums pietika ar trīs svēršanām.
    b) Ja svari nav līdzsvarā, tad ir divas iespējas:
        i) uz viena kausa atrodas viltota, uz otra – īsta;
        ii) uz abiem kausiem pa viltotai monētai.
2) Neatkarīgi no tā, kā monētas izkārtotas 1) b) gadījumā, otrajā svēršanā izvēlamies jebkuras citas divas monētas un salīdzinām tās savā starpā.
    a) Ja svari ir līdzsvarā, tad tikko svērtās monētas ir īstas. Ņemam vienu no īstajām monētām un salīdzinām ar pēdējo piekto monētu:
        i) ja svari ir līdzsvarā, tad ir spēkā 1) b) ii) un abas viltotās ir tās, kuras salīdzinājām pirmajā svēršanā;
        ii) ja svari nav līdzsvarā, tad tas nozīmē, ka piektā monēta ir viltota. Ja piektā monēta ir vieglāka par īsto, tad otra viltotā monēta būs tā, kura gadījumā 1) b) i), bija smagāka. Pretējā gadījumā otra viltotā monēta būs 1) b) i) gadījuma vieglākā monēta.
    b) Ja svari nav līdzsvarā, tad tas nozīmē, ka ir spēkā 1) b) i) gadījums un pie tam otra viltotā monēta atrodas starp tikko svērtajām monētām.
3) Zināms, ka viena no viltotajām monētām ir vieglāka, bet otra – smagāka. Trešajā svēršanā salīdzināsim pirmās svēršanas vieglāko monētu un otrās svēršanas smagāko monētu, jo šādi mēs garantējam, ka paņemam vai nu divas viltotas, vai divas īstas monētas.
    a) Ja svari ir līdzsvarā, tas nozīmē, ka tika salīdzinātas īstas monētas un ka abas viltotas būs tās divas, ko neizmantojām svēršanā.
    b) Ja svari nav līdzsvarā, tad trešajā svēršanā izmantojām abas viltotās monētas.

Ar trīs svēršanām esam apskatījuši visus iespējamos gadījumus un katrā reizē atraduši viltoto monētu, tāpēc secinām, ka Alvīnei tas vienmēr var izdoties.

Piezīme. Šis nav vienīgais veids, kā atrast abas viltotās monētas ar trīs svēršanām.

3. Dotas 6 vienādas formas eglīšu mantiņas, kuras nokrāsotas 3 dažādās krāsās – no katras krāsas pa divām. Katram mantiņu pārim, kas nokrāsotas vienādi, viena no mantiņām ir vieglāka. Visas vieglās mantiņas sver vienādi, un arī visas smagās mantiņas sver vienādi. Izmantojot 2 svēršanas uz sviru svariem, nosaki, kuras ir vieglās mantiņas un kuras – smagās!
Atrisinājums. Apzīmēsim mantiņu krāsas ar A, B un C. Tātad mums ir sešas mantiņas A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 un C_2. Mēs gribam iedot precīzākus apzīmējumus, piemēram, A_V un A_S attiecīgi vieglajām un smagajām mantiņām. Skaidrs, ka, ja atrod vieglo vai smago mantiņu kādai krāsai, tad uzreiz zināms, svars otrai tās pašas krāsas mantiņai. Vispirms salīdzināsim A_1, B_1 pret B_2, C_1.

1) Ja $A_1 + B_1 < B_2 + C_1$ tad
   - $B_1 < B_2$, jo pat ja A_1 ir viegla mantiņa un C_1 ir smaga mantiņa, tad pretējais gadījums, t.i., $B_1 > B_2$ novestu pie $A_1 + B_1 = B_2 + C_1$, tāpēc $B_1 = B_V$ un $B_2 = B_S$;
   - Ja $A_1 = A_S$, tad $C_1 = C_S$;
   - Ja $A_1 = A_V$, tad $C_1 = C_V$.

   Šo paturot prātā, salīdzināsim A_1, C_1 ar B_1, B_2.
   - Ja $A_1 + C_1 = B_1 + B_1$, tad $A_1 = A_V$ un $C_1 = C_S$;
   - Ja $A_1 + C_1 < B_1 + B_1$, tad $A_1 = A_V$ un $C_1 = C_V$;
   - Ja $A_1 + C_1 > B_1 + B_1$, tad $A_1 = A_S$ un $C_1 = C_S$.

2) Ja $A_1 + B_1 = B_2 + C_1$, tad salīdzināsim B_1 ar B_2.
   - Ja $B_1 = B_V$, tad $A_1 = A_S$ un $C_1 = C_V$;
   - Ja $B_1 = B_S$, tad $A_1 = A_V$ un $C_1 = C_S$.

3) Pēdējais gadījums, kad $A_1 + B_1 > B_2 + C_1$, ir līdzīgs 1) gadījumam, tāpēc šo atstājam lasītājam kā vingrinājumu.

4. Doti 5 maisi ar 1000 pēc izskata vienādām monētām. Kādā no maisiem visas monētas ir viltotas, bet pārējos maisos visas monētas ir īstas. Katra īstā monēta sver 10 gramus, bet viltotā – 11 gramus. Svēršanai drīkst izmantot elektroniskos svarus, kas var noteikt precīzu svaru jebkuram monētu skaitam. Kāds ir mazākais svēršanu skaits, lai atrastu maisu ar viltotajām monētām?
Atrisinājums. Pamatosim, ka šo var izdarīt ar vienu svēršanu. No pirmā maisa ņemsim 1 monētu, no otrā – 2 monētas, no trešā – 3 monētas, no ceturtā – 4 monētas un no piektā maisa ņemsim 5 monētas. Visas šis monētas vienlaikus nosveram un iegūsim kādu konkrētu summu S. Šie monētu skaiti tika izvēlēti tā, lai pēc kopējā svara varētu viennozīmīgi noteikt, kurā maisā atrodas viltotās monētas. Apkopsim šīs vērtības.

Maiss, kurā atrodas viltotās monētas	Kopējais svars
1. maiss	$S = 1 \cdot 11 + 14 \cdot 10 = 151$
2. maiss	$S = 2 \cdot 11 + 13 \cdot 10 = 152$
3. maiss	$S = 3 \cdot 11 + 12 \cdot 10 = 153$
4. maiss	$S = 4 \cdot 11 + 11 \cdot 10 = 154$
5. maiss	$S = 5 \cdot 11 + 10 \cdot 10 = 155$

5. Auseklim ir 101 monēta, no kurām 50 ir viltotas. Īstās monētas masa ir kāds nezināms naturāls skaitlis, bet visām viltotajām monētām ir vienāda masa, kas atšķiras no īstas monētas masas par 1 gramu. Auseklim ir sviras svari ar rādītāju, kas parāda to, cik tas, kas atrodas vienā kausā, sver vairāk vai mazāk nekā otrā kausā esošais. Izvēlējies vienu monētu, Auseklis grib noskaidrot, vai tā ir viltota vai īsta ar vienu svēršanu. Vai viņam tas var izdoties?

Atrisinājums. Pamatosim, ka viņam tas vienmēr var izdoties. Atlikušās 100 monētas sadala uz pusēm un katrā kausā novietojam pa 50 monētām. Apzīmēsim viltoto monētu skaitu labajā kausā ar L un kreisajā kausā ar K. Kopā $L+K$ ir 50 vai 49 atkarībā no tā, vai Auseklis ir izvēlējies viltotu monētu. Tā kā viltotās monēta masa atšķiras no īstas monētas masu par 1 gramu, tad svaru rādītājs rādīs tieši $|L-K|$. Ja $L+K$ ir 50, tad $L-K$ būs pāra skaitlis, jo 50 sadalīt divās daļās var vai nu kā divus pāra skaitļus (piemēram, $L=30$ un $K=20$), vai arī divus nepāra skaitļus (piemēram, $L=15$ un $K=35$). Līdzīgi varam spriest par to, kad $L+K=49$. Šajā gadījumā $L-K$ būs nepāra skaitlis. Tātad, ja Auseklis būs izvēlējies viltotu monētu, svari rādīs nepāra skaitli, pretējā gadījumā svari rādīs pāra skaitli.