

JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

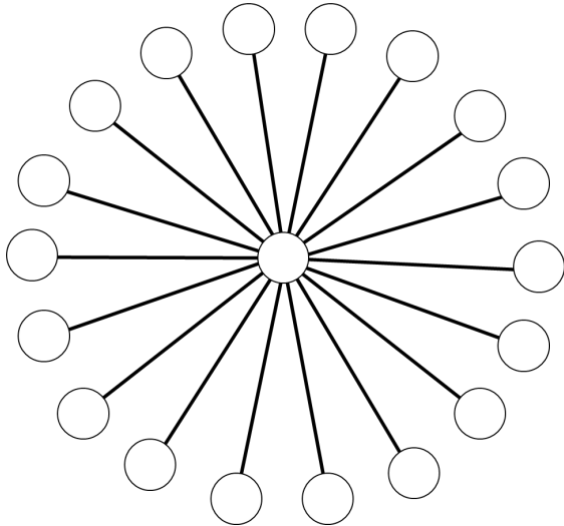
2020./2021. mācību gads

3. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

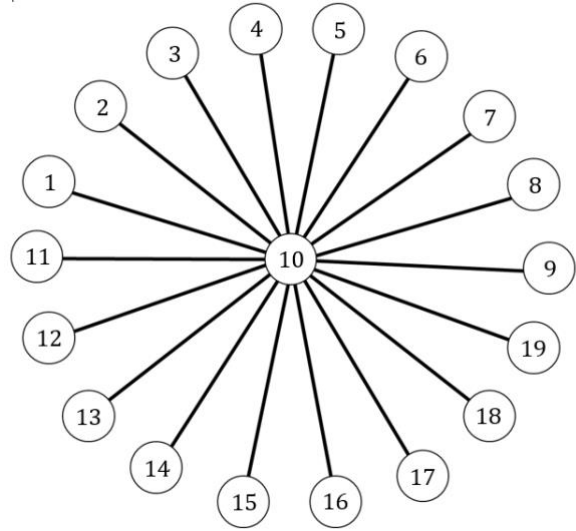


1. Maģiskā zvaigzne

Vai katrā aplītī (skat. 1. att.) var ierakstīt vienu skaitli no 1 līdz 19 (skaitļi nedrīkst atkārtoties) tā, lai katros trīs aplīšos, kas atrodas uz vienas taisnes, ierakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati?



1. att.



2. att.

Atrisinājums. Jā, var, skat., piemēram, skat. 2. att.

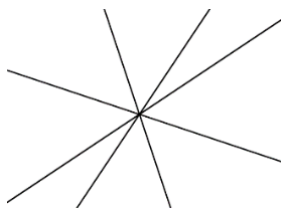
2. Decembra daudzstūris

Vai divpadsmitstūra **a)** četras, **b)** septiņas diagonāles var krustoties vienā punktā?

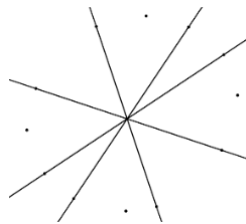
Piezīme. Daudzstūra diagonāle ir nogrieznis, kas savieno divas virsotnes, kas nepieder vienai malai.

Atrisinājums. a) Jā, var. Parādīsim, kā uzzīmēt divpadsmit stūri, lai četras diagonāles krustotos vienā punktā.

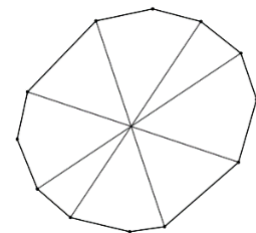
Vispirms uzzīmējam četras krustiskas taisnes (skat. 3. att.), uz katras no šīm četrām taisnēm izvēlamies divus punktus un vēl četrus punktus, kas neatrodas uz šīm taisnēm (skat. 4. att.). Savienojot 12 atliktos punktus, iegūstam divpadsmitstūri, kura četras diagonāles krustojas vienā punktā (skat. 5. att.).



3. att.



4. att.



5. att.

b) Nē, nevar. Ja septiņas diagonāles krustotos vienā punktā, tad tām kopā ir $7 \cdot 2 = 14$ dažādi gali, kas būtu daudzstūra dažādas virsotnes. Iegūta pretruna, jo divpadsmitstūrim ir tikai divpadsmit virsotnes.

Atrisinājums. a) Jā, var gadīties, ka katrs rūķis ieguva atšķirīgu mīklas atrisinājumu, piemēram, skat. 8. att.

KRUSTSKAITĻU MĪKLĀ				KRUSTSKAITĻU MĪKLĀ				KRUSTSKAITĻU MĪKLĀ															
1	9	2	6	3	1	4	4	1	9	2	6	3	2	4	4	1	9	2	6	3	2	4	4
2	2	5	6	5	6	4	4	2	2	5	6	8	8	8	8	2	2	5	6	0	0	0	0
6	1	2	5	7	9	6	1	6	1	2	5	7	1	4	4	6	1	2	5	7	1	0	0
Horizontāli				Vertikāli				Horizontāli				Vertikāli				Horizontāli				Vertikāli			
1. Skaitļa kvadrāts				1. Skaitļa kvadrāts				1. Skaitļa kvadrāts				1. Skaitļa kvadrāts				1. Skaitļa kvadrāts				1. Skaitļa kvadrāts			
3. Skaitļa kvadrāts				2. Skaitļa kvadrāts				3. Skaitļa kvadrāts				2. Skaitļa kvadrāts				3. Skaitļa kvadrāts				2. Skaitļa kvadrāts			
5. Skaitļa kvadrāts				3. Skaitļa kvadrāts				5. Skaitļa kvadrāts				3. Skaitļa kvadrāts				5. Skaitļa kvadrāts				3. Skaitļa kvadrāts			
6. Skaitļa kubs				4. Skaitļa kvadrāts				6. Skaitļa kubs				4. Skaitļa kvadrāts				6. Skaitļa kubs				4. Skaitļa kvadrāts			
7. Skaitļa kvadrāts								7. Skaitļa kvadrāts								7. Skaitļa kvadrāts							

8. att.

b) Pamatosim, ka cipars 3 nevar atrasties nevienā otrās rindas rūtiņā. Šīs rūtiņas apzīmējam ar burtiem A, B, C, D un E (skat. 9. att.).

KRUSTSKAITĻU MĪKLĀ							
1	2	3	4	5	6	7	8
A	B	C	D	E	6	7	8
6	7	8	9	0	1	2	3
Horizontāli				Vertikāli			
1. Skaitļa kvadrāts				1. Skaitļa kvadrāts			
3. Skaitļa kvadrāts				2. Skaitļa kvadrāts			
5. Skaitļa kvadrāts				3. Skaitļa kvadrāts			
6. Skaitļa kubs				4. Skaitļa kvadrāts			
7. Skaitļa kvadrāts							

9. att.

Ievērojam, ka katrs no burtiem ir desmitu cipars kādam skaitļa kvadrātam. Līdz ar to, lai cipars 3 atrastos otrajā rindā, noteikti ir jābūt skaitļa kvadrātam, kura desmitu cipars ir 3. Atradam visus skaitļus, kuru kvadrāti ir trīsciparu skaitļi. Der skaitļi no 10 līdz 31 (skat. tabulā zemāk), jo $9^2 = 81$ un $32^2 = 1024$. Redzam, ka nav tāda skaitļa kvadrāta, kura desmitu cipars ir 3, tātad otrajā rindā nevar būt cipars 3.

Skaitlis	Skaitļa kvadrāts	Skaitlis	Skaitļa kvadrāts	Skaitlis	Skaitļa kvadrāts	Skaitlis	Skaitļa kvadrāts
10	100	16	256	22	484	28	784
11	121	17	289	23	529	29	841
12	144	18	324	24	576	30	900
13	169	19	361	25	625	31	961
14	196	20	400	26	676		
15	225	21	441	27	729		

5. Eglīšu mantiņas

Katrā no divām kastēm ir 10 eglīšu mantiņas, katra mantiņa ir vai nu zaļā, vai sarkanā, vai zilā krāsā. Vienā no kastēm ir vismaz 7 zilās mantiņas, bet otrā kastē ir vismaz 4 sarkanas mantiņas. Zināms, ka zilo mantiņu ir divas reizes vairāk nekā zaļo mantiņu. Pierādi, ka sarkano mantiņu ir tikpat, cik zilo mantiņu, vai arī sarkano mantiņu ir tikpat, cik zaļo mantiņu!

Atrisinājums. Tā kā zilo mantiņu ir divas reizes vairāk nekā zaļo mantiņu, tad zilo mantiņu skaits ir pāra skaitlis. Pēc dotā zilo mantiņu skaits ir vismaz 7, tāpēc apskatām iespējamās zilo mantiņu skaitus:

- ja ir 8 zilās mantiņas, tad ir $8:2 = 4$ zaļās mantiņas un $20 - 8 - 4 = 8$ sarkanas mantiņas; šajā gadījumā zilo mantiņu ir tikpat, cik sarkano mantiņu (izpildās uzdevumā prasītais);
- ja ir 10 zilās mantiņas, tad ir $10:2 = 5$ zaļās mantiņas un $20 - 10 - 5 = 5$ sarkanas mantiņas; šajā gadījumā sarkano mantiņu ir tikpat, cik zaļo mantiņu (izpildās uzdevumā prasītais);
- ja ir 12 zilās mantiņas, tad ir $12:2 = 6$ zaļās mantiņas un $20 - 12 - 6 = 2$ sarkanas mantiņas; tā nevar būt, jo sarkano mantiņu skaits ir vismaz 4;
- ja ir 14 vai vairāk zilās mantiņas, tad ir vismaz 7 zaļās mantiņas un kopējais mantiņu skaits ir lielāks nekā 20, bet tā nevar būt.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka sarkano mantiņu ir tikpat, cik zilo mantiņu, vai arī sarkano mantiņu ir tikpat, cik zaļo mantiņu.