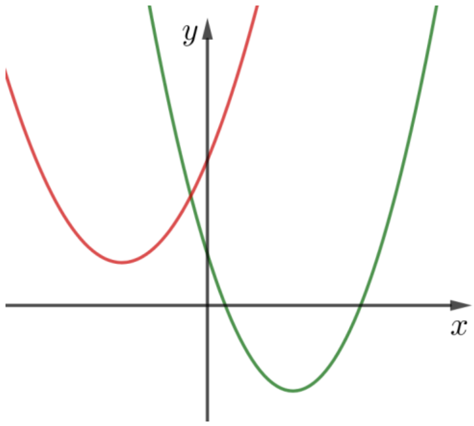
Latvijas 71. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

1. Neaizsalušas upes krastā 50 km attālumā atrodas divas piestātnes Novadija un Olimpija, no kurām vienlaicīgi izbrauca Rihards un Kalvis. Rihards ar laivu izbrauca no Novadijas un brauca pret straumi, bet Kalvis ar laivu izbrauca no Olimpijas un brauca pa straumi. Pēc 3 stundām abi sastapās. Aprēķināt abu braucēju laivu ātrumu stāvošā ūdenī, ja zināms, ka ātrumi stāvošā ūdenī ir vienādi un upes straumes ātrums ir 5 km/h.

2. Vai var gadīties, ka 1. att. ir doti funkciju $y = ax^2 + bx + c$ un $y = bx^2 + cx + a$ grafiki? Funkciju grafiki nav zīmēti mērogā.



1. att.

3. Uz kvadrāta $ABCD$ malas AD izvēlēts punkts E tā, ka $AB + AE = CE$. Aprēķināt S_{CED}, ja $AB = 1$.

4. Atrast mazāko naturālo skaitli k, kuram izpildās sekojoša īpašība: nevienam pirmskaitlim p skaitlis $p + 1$ nav naturāla skaitļa k-tā pakāpe.

5. Doti 120 dažādi naturāli skaitļi, tie sadalīti pa pāriem tā, ka katrā pārī skaitļu summa ir lielāka nekā 1000. Pierādīt, ka, ja šos dotos 120 skaitļus uzrakstītu rindā augošā secībā, tad 22. un 99. skaitļa summa arī būtu lielāka nekā 1000.

Latvijas 71. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

1. Maruta un Elīna raksta olimpiādes uzdevuma atrisinājumu. Maruta sāka rakstīt atrisinājumu, pēc tam, kad viņa bija rakstījusi 1 h un 12 min, Elīna turpināja rakstīt risinājumu un pēc 3 h to pabeidza. Cik ilgā laikā uzdevuma atrisinājumu varētu uzrakstīt Maruta un Elīna, strādājot atsevišķi, ja zināms, ka Elīnai nepieciešams par 2 h vairāk laika atrisinājuma uzrakstīšanai nekā Marutai?

2. Aplūkosim funkcijas $y = ax^2 + 2x + 2b$, kuru koeficienti a un b ir reāli skaitļi, kurus saista sakarība $a + 18b = 2021$. Pierādīt, ka visu šo funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti.

3. Kvadrāta $ABCD$, kura malas garums ir 1, malas AB viduspunkts ir E un malas BC viduspunkts ir F. Nogrieznis AF krusto ED un EC attiecīgi punktos G un H, bet FD un EC krustojas punktā I. Aprēķināt četrstūra $DGHI$ laukumu.

4. Pierādīt, ka nevienai naturālai n vērtībai izteiksmes $n^2 - n + 36$ vērtība nedalās ar **a)** 165; **b)** 169.

5. Doti 500 dažādi naturāli skaitļi, tie sadalīti pa pāriem tā, ka katrā pārī skaitļu summa ir lielāka nekā 2000. Pierādīt, ka, ja šos 500 dotos skaitļus uzrakstītu rindā augošā secībā, tad 146. un 376. skaitļu summa būtu lielāka nekā 2021.

Valsts izglītības satura centrs
NACIONĀLAIS ATTĪSTĪBAS PLĀNS 2020
EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais fonds
IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

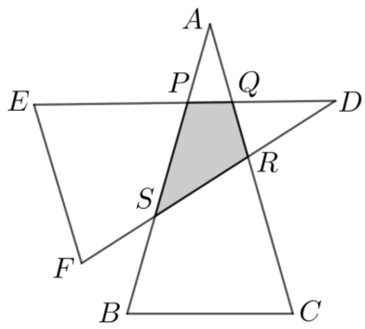
Latvijas 71. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

1. Dota aritmētiskā progresija un ģeometriskā progresija, kurām abām pirmais loceklis ir 2. Aritmētiskās progresijas otrais loceklis ir par 0,25 lielāks nekā ģeometriskās progresijas otrais loceklis, bet trešais loceklis abām progresijām ir vienāds. Aprēķināt aritmētiskās progresijas pirmo piecu locekļu summu.

2. Doti tādi skaitļi a, b un c, ka $a+c=\frac{b}{2021}$, turklāt neviens no skaitļiem a, b, c nav 0. Pierādīt, ka vienādojumam $ax^2+bx+c=0$ ir sakne, kas atrodas intervālā $[-1;1]$.

3. Divi vienādi vienādsānu trijstūri ABC un DEF ($AB=AC=DE=DF$ un $BC=EF$) krustojoties veido četrstūri $PQRS$ (skat. 1. att.), kuram var apvilkt riņķa līniju. Pierādīt, ka divi no četrstūra $PQRS$ leņķiem ir taisni.



1. att.

4. Naturālu skaitli sauksim par *tīri jauku*, ja to iespējams izteikt formā $a \cdot b + c \cdot d$, kur a, b, c, d – dažādi naturāli skaitļi, kas lielāki nekā 1. Piemēram, skaitlis 100 ir *tīri jauks*, jo $100 = 7 \cdot 10 + 5 \cdot 6$. Pierādīt, ka jebkuru divu *tīri jauku* skaitļu summa arī ir *tīri jauks* skaitlis.

5. Šaha turnīrā katrs dalībnieks ar katru izspēlēja tieši vienu partiju. Katrā partijā par uzvaru tiek piešķirts 1 punkts, par neizšķirtu tiek piešķirti 0,5 punkti, par zaudējumu – 0 punkti. Turnīra beigās izrādījās, ka katra dalībnieka uzvaru skaits nepārsniedz tā neizšķirtu skaitu un nav divu dalībnieku, kuri kopsummā būtu ieguvuši vienādu punktu skaitu. Vai iespējams, ka turnīrā piedalījās **a)** 15 dalībnieki, **b)** 16 dalībnieki?

LATVIJAS UNIVERSITĀTE ANNO 1919
LATVIJAS UNIVERSITĀTE
Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultāte
A. Liepas Neklātienes matemātikas skola

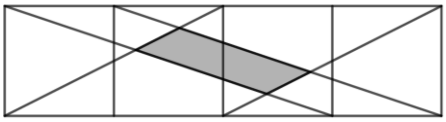
Latvijas 71. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

1. Pa 4,5 km garu trasi, kurai ir riņķa līnijas forma, ar sniega motocikliem brauc Māris un Mārtiņš. Māris sekundē nobrauc par 1 metru vairāk nekā Mārtiņš, tāpēc visu trasi veic par 50 sekundēm ātrāk nekā Mārtiņš. Ar kādu ātrumu brauc Māris un Mārtiņš?

2. Dots, ka $8ac + 2bc + c^2 < 0$. Pierādīt, ka $b^2 - 8ac > 0$.

3. Taisnstūris salikts no četriem vienības kvadrātiem. Aprēķināt iekrāsotā četrstūra (skat. 1. att.) laukumu un leņķus.



1. att.

4. Doti naturāli skaitļi a un b, kas lielāki nekā 1. Zināms, ka gan $a^2 + b$, gan $b^2 + a$ ir pirmskaitļi. Pierādīt, ka $a + b$ un $ab + 1$ ir savstarpēji pirmskaitļi.

5. Taisnstūrveida rūtiņu tabulā ar n rindām un m kolonnām ($n > 1$, $m > 1$) katrā rūtiņā ierakstīts atšķirīgs naturāls skaitlis. Sākumā rūtiņās ierakstītie skaitļi pa rindām bija sakārtoti augošā secībā (katrā rindā visi skaitļi no katras rūtiņas pa labi ir lielāki, bet pa kreisi – mazāki nekā tajā esošais skaitlis). Pēc tam visas kolonnas sakārtoja augošā secībā (katrā kolonnā visi skaitļi virs katras rūtiņas ir mazāki, bet zem – lielāki nekā tajā esošais skaitlis). Pierādīt, ka pēc pārkārtošanas tabulā ierakstītie skaitļi pa rindām joprojām ir sakārtoti augošā secībā.