"Profesora Cipariņa klubs"

4. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Antons sadalīja ciparus no 1 līdz 9 trijās grupās pa 3 cipariem katrā un aprēķināja katras grupas ciparu reizinājumu. Kāda vismazākā vērtība var būt vislielākajiem no šiem reizinājumiem?
Atrisinājums. Pamatosim, ka šis skaitlis nevar būt mazāks kā 72. Tā kā tiek sadalīti cipari no 1 līdz 9, tad jebkuram sadalījumam visu trīs grupu reizinājums vienmēr būs $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362880$. Ja lielākais skaitlis būtu mazāks nekā 72, piemēram, 71, tad visu trīs grupu reizinājums nepārsniegs $71 \cdot 71 \cdot 71 = 357911$. Ievērojam, ka $357911 < 362880$, tāpēc varam secināt, ka vismazākajai vērtībai jābūt vismaz 72. Parādīsim tagad piemēru, kā šo skaitli var iegūt:

$$9 \cdot 8 \cdot 1 = 72; \quad 6 \cdot 4 \cdot 3 = 72; \quad 7 \cdot 5 \cdot 2 = 70.$$

2. Kādu ciparu varētu ierakstīt jautājuma zīmes vietā, lai iegūtais 2021-ciparu skaitlis

$$\underbrace{66\ldots66}_{1010}?\underbrace{99\ldots99}_{1010}$$

dalītos ar 7?
Atrisinājums. Nav grūti pārliecināties, ka 666666 un 999999 dalās ar 7. Sadalīsim doto 2021-ciparu skaitli sīkāk. Piemēram, 999999999999 (skaitlis ar divpadsmit “9”) sadalāms sīkāk kā $999999999999 = 999999 \cdot 1000001$. Šis skaitlis arī dalīsies ar 7, jo 999999 dalās ar 7. Tādā pašā veidā varam sadalīt jebkuru “9” virkni, kura garums dalās ar 6. Dotajam skaitlim “9” virkne ir garumā 1010, kas nedalās ar 6. Tas nozīmē, ka mēs varam atdalīt $\underbrace{99\ldots99}_{1008}$, jo šis skaitlis dalīsies ar 7. Tātad mēs esam sadalījuši skaitli sekojoši:

$$\underbrace{66\ldots66}_{1010}?\underbrace{99\ldots99}_{1010} = \underbrace{66\ldots66}_{1010}?99 \cdot 10^{1009} + \underbrace{99\ldots99}_{1008}.$$

Tas nozīmē, ka mums jāatrod tāds cipars, lai $\underbrace{66\ldots66}_{1010}?99$ dalītos ar 7. Līdzīgi varam atdalīt nost “6” virkni garumā 1008, kas dalīsies ar 7:

$$\underbrace{66\ldots66}_{1010}?\underbrace{99\ldots99}_{1010} = \underbrace{66\ldots66}_{1008} \cdot 10^{1014} + 66?99 \cdot 10^{1009} + \underbrace{99\ldots99}_{1008}.$$

Tātad atliek tikai pārliecināties, kāds cipars jāliek jautājuma zīmes vietā, lai skaitlis 66?99 dalītos ar 7. Šeit vienkārši varam pārbaudīt visas vērtības no 1 līdz 9.

- $\frac{66199}{7} = 9457$;
- 66299 nedalās ar 7;
- 66399 nedalās ar 7;
- 66499 nedalās ar 7;
- 66599 nedalās ar 7;
- 66699 nedalās ar 7;
- 66799 nedalās ar 7;
- $\frac{66899}{7} = 9557$;
- 66999 nedalās ar 7.

Rezultātā iegūstam, ka jautājuma zīmes vietā der cipari 1 un 8.

3. Kāda var būt vislielākā dalījuma vērtība, ja četrciparu skaitli izdala ar tā ciparu summu?

Atrisinājums. Apskatīsim patvaļīgu četrciparu skaitli $\overline{abcd}$. Papētīsim dalījumu ar tā ciparu summu:

$$\frac{1000a + 100b + 10c + d}{a + b + c + d} = 1 + \frac{999a + 99b + 9c}{a + b + c + d}.$$

Dalījums būs vislielākais, kad saucējā būs pēc iespējas mazāks skaitlis. Tā kā cipars d neatrodas skaitītājā, tad, lai iegūtu vislielāko dalījumu, jāizvēlas $d = 0$.

$$1 + \frac{999a + 99b + 9c}{a + b + c + 0} = 1 + \frac{(9a + 9b + 9c) + (990a + 90b)}{a + b + c} = 10 + \frac{990a + 90b}{a + b + c}.$$

Līdzīgu spriedumu dēļ jāizvēlas $c = 0$:

$$10 + \frac{990a + 90b}{a + b + 0} = 10 + \frac{(90a + 90b) + 900a}{a + b} = 100 + \frac{900a}{a + b} = 1000.$$

Tālāk atkal jāizvēlas $b = 0$. Paliek pāri a, kas noīsinās. Tātad der jebkurš $a \neq 0$. Iegūstam, ka lielākais dalījums būs 1000, četrciparu skaitļiem $1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000$ un 9000.

4. Anna ar saviem draugiem izlēma rīkot kino seansus, bet ierobežojumu dēļ katru apmeklēja tieši 3 cilvēki vienlaikus. Zināms, ka neviens draugu pāris nebija kopā vairāk kā vienā seansā. Kāds ir lielākais iespējamais seansu skaits, ja kopā ir 8 draugi, ieskaitot Annu?

Atrisinājums. Vispirms pamatosim, ka katrs no draugiem var apmeklēt ne vairāk kā 3 seansus. Tik tiešām, ja kāds (piemēram, Anna) apmeklētu vismaz 4 seansus, tad viņa sastaptu vismaz $4 \cdot 2 = 8$ draugus. Tā kā Annai ir tikai 7 draugi, tad pēc Dirihlē principa varam secināt, ka būs vismaz 1 tāds draugs, kurš atkārtosies, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tas nozīmē, ka kopā var būt ne vairāk kā $8 \cdot 3 = 24$ seansu apmeklējumu (katrs no draugiem apmeklē 3 seansus), bet katrā seansā ietilpst 3 cilvēki, tāpēc rezultējošais seansu skaits būs $24 : 3 = 8$. Ja apzīmējam draugus ar $A; B; C; D; E; F; G; H$, tad šos 8 seansus varam rīkot sekojoši:

$$ABC; ADE; AFG; BGE; BHF; CDF; CEH; DHG.$$

5. Doti pieci skaitļi a, b, c, d un e. Viens no tiem ir 1, otrs – 2, trešais – 3, ceturtais – 4 un piektais – 5. Kādu vislielāko vērtību var pieņemt izteiksme $ab + bc + cd + de + ea$?

Atrisinājums. Apskatīsim izteiksmi

$$\begin{aligned}&(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + d)^2 + (d + e)^2 + (e + a)^2 = \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) + 2(ab + bc + cd + de + ea).\end{aligned}$$

Pirmajās iekavās atradīsies skaitlis $55 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$, neatkarīgi no tā, kā skaitļi sadalīti starp mainīgajiem, tāpēc esam ieguvuši, ka

$$(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + d)^2 + (d + e)^2 + (e + a)^2 = 110 + 2(ab + bc + cd + de + ea).$$

Lai atrastu vislielāko vērtību $ab + bc + cd + de + ea$, atliek atrast lielāko vērtību mūsu izteiksmei. Iekavās jāparādās pēc iespējas lielākiem skaitļiem, t.i., 9 un 8, lai iegūtu maksimālu summu. Tik tiešām, ja mums ir jāsadala $30 = 2(a + b + c + d + e)$ piecās daļās, ko kāpinās kvadrātā, tad vismazāko summu var iegūt, ja sadala pēc iespējas vienādākās daļās, piemēram, $6^2 + 6^2 + 6^2 + 6^2 + 6^2 = 180$. Lielāku summu varam iegūt, ja, piemēram, $6^2 + 6^2$ aizvieto ar $5^2 + 7^2$. Vislielāko summu iegūst, ja sadalām nevienmērīgi, t.i., $30^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 900$. Protams, mums šāds sadalījums nav iespējams, tāpēc jācenšas izvēlēties tāds sadalījums, lai parādās gan 9, gan 8. Viens no šādiem sadalījumiem ir sekojošs:

$$a = 5; b = 4; c = 2; d = 1; e = 3.$$

Iegūstam, ka maksimālā summa būs $5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 48$.