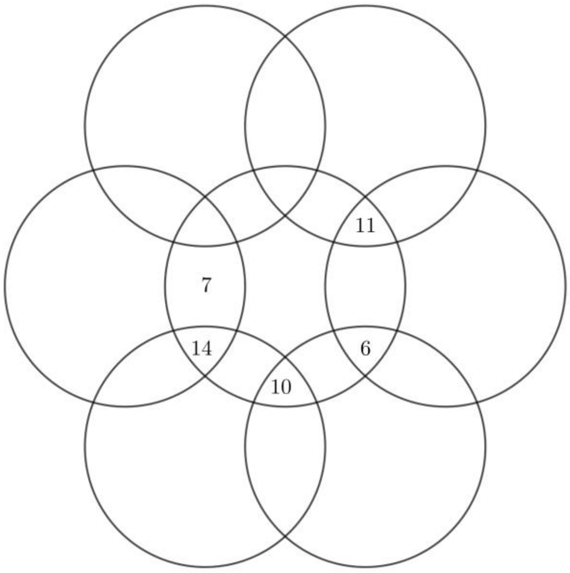
JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

2020./2021. mācību gads

4. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

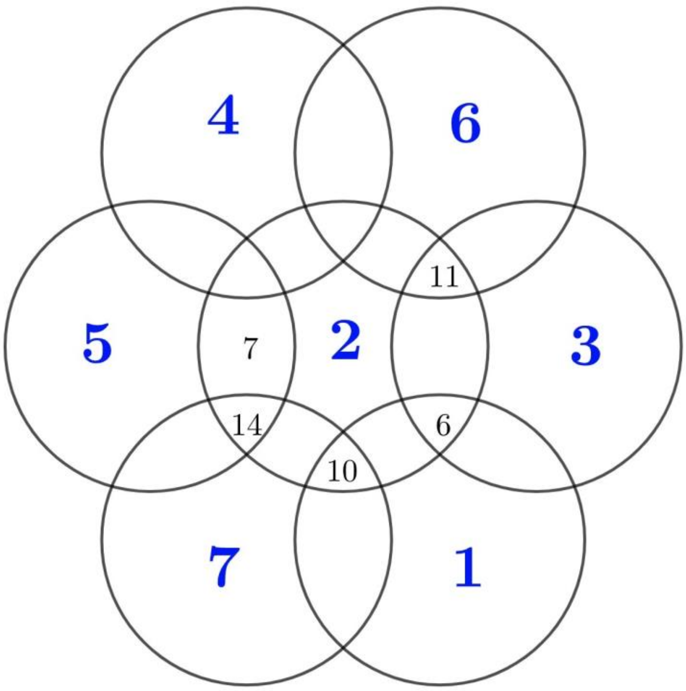
1. Senais ornaments

Uz galda stāv sens ornaments (skat. 1. att.). Oriģināli ornamenta katrā no septiņiem riņķiem bija ierakstīts viens skaitlis no 1 līdz 7 (*katrs skaitlis izmantots vienu reizi*), bet vietās, kur riņķi pārklājas, ierakstīta atbilstošo riņķos ierakstīto skaitļu summa. Atjauno izdzisušos skaitļus!



1. att.

Atrisinājums. Skaitļu izvietojumu skat. 2. att.



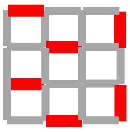
2. att.

2. Andra uzdevums

Kādu dienu, strādājot no mājām, Andris paņēma rūtiņu lapu un zīmēja dažādu izmēru kvadrātu režģus ar pelēkas krāsas rakstāmo. Tad viņš paņēma sarkanu rakstāmo un pārkrāsoja dažus pelēkos nogriežņus (nogrieznis ir rūtiņas mala) sarkanus tā, lai katrs pelēkais nogrieznis saskartos ar vismaz vienu sarkano nogriezni.

Piemēram, 3. att. uzzīmēts pelēks kvadrāts 3×3 un pēc tam 6 nogriežņi pārkrāsoti sarkanā krāsā tā, ka katrs pelēkais nogrieznis saskaras ar vismaz vienu sarkano nogriezni.

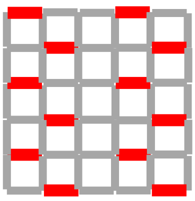
- **a)** Kvadrātā 5×5 pārkrāso 12 nogriežņus sarkanā krāsā tā, lai izpildītos nosacījums, ka katrs pelēkais nogrieznis saskaras ar vismaz vienu sarkano nogriezni!
- **b)** Vai var gadīties, ka kvadrātā ar izmēriem 9×9 ir iekrāsoti 34 nogriežņi atbilstoši uzdevuma nosacījumiem?
- **c)** Iekrāso, tavuprāt, mazāko nogriežņu skaitu kvadrātā ar izmēriem 19×19 tā, lai katrs pelēkais nogrieznis saskaras ar vismaz vienu sarkano nogriezni!



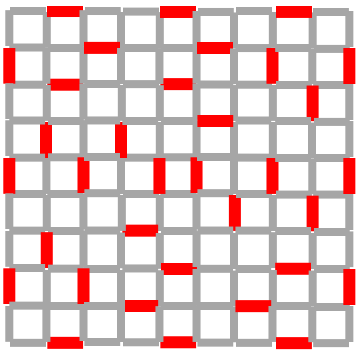
3. att.

Atrisinājums. a) Skat., piemēram, 4. att.

b) Skat., piemēram, 5. att.

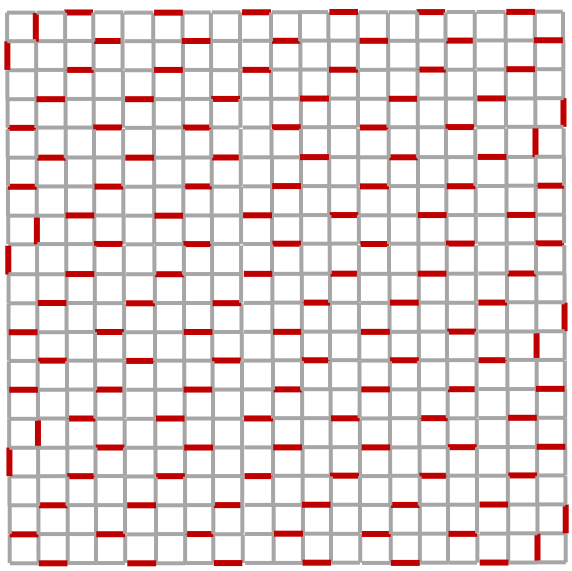


4. att.



5. att.

c) Mazākais nogriežņu skaits, kas jāiekrāso kvadrātā ar izmēriem 19×19 tā, lai katrs pelēkais nogrieznis saskaras ar vismaz vienu sarkano nogriezni, ir 134 (skat., piemēram, 6. att.).



6. att.

3. Sniegpārsliņas

Agnesei uz galda stāv trīs papīra lapas, uz kurām uzzīmētas attiecīgi 18, 111 un 221 sniegpārsliņas. Vai Agnese var panākt, ka uz visām lapām ir uzzīmēts vienāds skaits sniegpārsliņu, ja vienā gājienā viņa var izvēlēties divas lapas un uz katras piezīmēt klāt vienu sniegpārsliņu?

Atrisinājums. Jā, var. Aprakstīsim, kā viņai jārīkojas:

1) vispirms jāizvēlas lapas, uz kurām uzzīmētas 18 un 221 sniegpārsliņa, un gājienu jāveic tik ilgi, kamēr uz lapas, kurā sākotnēji bija uzzīmētas 18 sniegpārsliņas, ir uzzīmētas 111 sniegpārsliņas (tas ir, jāveic 93 gājieni),
2) pēc šiem 93 gājieniem uz lapām būs uzzīmētas attiecīgi 111, 111 un 314 sniegpārsliņas,
3) tālāk jāizvēlas tās lapas, uz kurām ir uzzīmētas 111 sniegpārsliņas un gājieni jāveic tik ilgi, kamēr tām arī ir uzzīmētas 314 sniegpārsliņas (tas ir, jāveic 203 gājieni),
4) pēc šiem 203 gājieniem uz visām trīs lapām būs uzzīmētas 314 sniegpārsliņas.

4. Skaitļu kvadrāti

Gunai ir deviņas kartītes, uz katras kartītes uzrakstīts viens cipars no 1 līdz 9, katrs vienu reizi. Cik dažādos veidos viņa var salikt kartītes tā, lai visi trīs izveidotie trīsciparu skaitļi būtu naturālu skaitļu kvadrāti?

Piezīme. Izveidoto skaitļu secība nav svarīga.

Atrisinājums. Guna prasīto var izdarīt tikai vienā veidā, izveidotie skaitļi ir $361 = 19^2$, $529 = 23^2$ un $784 = 28^2$. Apskatām visus trīscipara skaitļus, kas ir naturāla skaitļa kvadrāti, ievērojot, ka $9^2 = 81 < 100$ un $32^2 = 1024 > 999$. Derīgie trīsciparu skaitļi iekrāsoti (skat. tabulu).

n	n^2	n	n^2	n	n^2
10	100	18	324	26	676
11	121	19	361	27	729
12	144	20	400	28	784
13	169	21	441	29	841
14	196	22	484	30	900
15	225	23	529	31	961
16	256	24	576		
17	289	25	625		

Apskatām abus skaitļus, kas satur ciparu 3.

- Ja ir izveidots skaitlis 324, tad nevar izveidot skaitli, kas saturētu ciparu 8, jo visi šādi skaitļi (289 un 784) satur kādu no jau izmantotajiem cipariem (attiecīgi 2 un 4). Tātad šis gadījums neder.
- Ja ir izveidots skaitlis 361, tad ciparu 4 var izmantot tikai skaitlī 784 (skaitļi 324 un 841 neder, jo tad atkārtotos cipari). No atlikušajiem cipariem var izveidot tikai vienu skaitļa kvadrātu un tas ir skaitlis 529.

5. Antona burvju triks

Antons savam draugam Kārlim rādīja burvju triku, izmantojot 100 bumbiņas, uz kurām uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 100, katrs vienu reizi. Antons salika bumbiņas trīs kastēs, kas nokrāsotas attiecīgi baltā, zilā un zaļā krāsā, katrā kastē viņš ielika vismaz vienu bumbiņu. Pēc tam Kārlim, Antonam neredzot, bija jāizņem pa vienai bumbiņai no divām kastēm un jāaprēķina uz bumbiņām uzrakstīto skaitļu summu. Zinot tikai šo summu, Antons pateica, no kuras krāsas kastes bumbiņa netika izņemta.

Uzraksti divus atšķirīgus veidus (neņemot vērā kastu krāsas), kā Antons varēja salikt bumbiņas kastēs, lai šis triks vienmēr izdotos!

Atrisinājums. Apskatīsim, kā Antons varēja salikt bumbiņas dotajās kastēs.

1. Baltajā kastē liek bumbiņu ar numuru 1, zilajā bumbiņas ar numuriem 2; 3; 4; …; 98; 99 un zaļajā kastē bumbiņu ar numuru 100. Tādā gadījumā, izvelkot bumbiņu
   - no baltās un zilās kastes, to numuru summa ir no 3 līdz 100;
   - no baltās un zaļās kastes, to numuru summa ir 101;
   - no zilās un zaļās kastes, to numuru summa ir no 102 līdz 199.

   Tā kā visas summas ir atšķirīgas, tad var noteikt, no kuras kastes bumbiņa netika izvilkta.
2. Baltajā kastē ir bumbiņas, kuru numuri ir 1; 4; 7; ...; 97; 100 (tas ir, skaitļi, kas dalot ar 3, dod atlikumu 1), zilajā kastē ir bumbiņas, kuru numuri ir 2; 5; 8; ...; 95; 98 (tas ir, skaitļi, kas dalot ar 3, dod atlikumu 2), un zaļajā kastē ir bumbiņas, kuru numuri ir 3; 6; 9; ...; 96; 99 (tas ir, skaitļi, kas dalās ar 3). Šajā gadījumā, izvelkot bumbiņas
   - no baltās un zilās kastes, to numuru summa dalās ar 3;
   - no baltās un zaļās kastes, to numuru summa, dalot ar 3, dod atlikumu 1;
   - no zilās un zaļās kastes, to numuru summa, dalot ar 3, dod atlikumu 2.

   Tā kā katrā gadījumā atlikums, dalot ar 3, ir atšķirīgs, tad var noteikt, no kuras kastes bumbiņa netika izvilkta.