

JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

2020./2021. mācību gads

5. kārtas uzdevumi un atrisinājumi



1. Skaitļu ceļš

Izvietojiet skaitļus no 2 līdz 25 dotajā laukumā (skat. 1. att.) tā, lai pēc kārtas esoši skaitļi atrastos blakus rūtiņās (blakus rūtiņas ir tās rūtiņas, kam ir kopīga mala vai kopīgs stūris). Piemēram, skaitlim 2 blakus rūtiņās ir jābūt gan skaitlim 1, gan skaitlim 3. Skaitļu izvietošanu pa rindām, kolonnām un diagonālēm mainīt nedrīkst (piemēram, skaitlim 8 un 14 ir jāatrodas pirmajā rindā, skaitlim 5 un 18 ir jāatrodas ceturtajā kolonnā, skaitļiem 20, 13, 16, 7 jāatrodas uz atbilstošajām diagonālēm).

20	25	3	22	5	6	16
8						14
12						9
11		1				4
19						23
21						24
7	2	10	15	18	17	13

1. att.

Atrisinājums. Skaitļu izvietošanu skat. 2. att.

20	25	3	22	5	6	16
8	13	14	15	8	7	14
12	12	10	9	16	6	9
11	11	1	4	5	17	4
19	2	3	23	18	19	23
21	25	24	22	21	20	24
7	2	10	15	18	17	13

2. att.

2. Baņķieru darbs

Septiņi baņķieri sēž ap apaļu galdu un gatavojas skaitīt naudu. Galvenajam baņķierim Mārim ir 1024 pakas ar naudu, bet pārējiem nav nevienas pakas ar naudu. Pusi no savām pakām Māris atdod abiem saviem blakus sēdētājiem, sadalot to vienādās daļās. Kad katrs baņķieris pārskaita (pirmā naudas skaitīšana) viņam piederošo naudu, tad katrs baņķieris (arī Māris) pusi no savām naudas pakām vienādās daļās atdod abiem saviem blakus sēdētājiem. Un tā viņi turpina darbu. **a)** Cik naudas pakas bija Mārim trešajā naudas skaitīšanas reizē? **b)** Cik naudas pakas bija Mārim piektajā naudas skaitīšanas reizē?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka Māris sēž vidū un virknes gali ir "savienoti riņķī". Uzdevumā aprakstītais process attēlots tabulā, kur "+" nozīmē, ka baņķieris attiecīgo naudas daudzumu saņem, bet "-" nozīmē, ka baņķieris attiecīgo naudas daudzumu atdod.

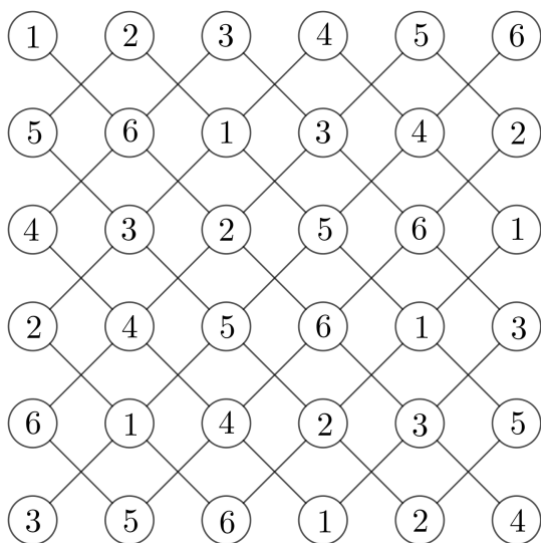
Tātad esam ieguvuši, ka **a)** trešajā naudas skaitīšanā Mārim būs 320 pakas ar naudu, **b)** piektajā naudas skaitīšanā Mārim būs 252 pakas ar naudu.

Māris							
sākumā	0	0	0	1024	0	0	0
			+1024:4	-1024:2	+1024:4		
1. skaitīšana	0	0	256	512	256	0	0
		+256:4	-256:2	-512:2	-256:2		
			+512:4	+(256:4)·2	+256:2	+256:4	
2. skaitīšana	0	64	256	384	256	64	0
		-64:2	-256:2	-384:2	-256:2	-64:2	
	+64:4	+256:4	+384:4	+(256:4)·2	+384:4	+256:4	+64:4
3. skaitīšana	16	96	240	320	240	96	16
	-16:2	-96:2	-240:2	-320:2	-240:2	-96:2	-16:2
	+96:4	+240:4	+320:4	+(240:4)·2	+320:4	+240:4	+96:4
	+16:4	+16:4	+96:4		+96:4	+16:4	+16:4
4. skaitīšana	36	112	224	280	224	112	36
	-36:2	-112:2	-224:2	-280:2	-224:2	-112:2	-36:2
	+112:4	+224:4	+280:4	+(224:4)·2	+280:4	+224:4	+112:4
	+36:4	+36:4	+112:4		+112:4	+36:4	+36:4
5. skaitīšana	55	121	210	252	210	121	55

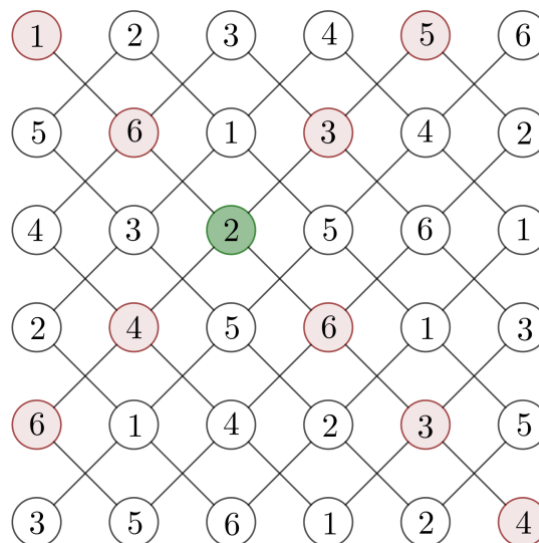
3. Neparastās monētas

Uz galda izvietotas monētas, kuru vērtības ir no 1 līdz 6 *mondiem* (skat. 3. att.). Vai iespējams izvēlēties dažas monētas tā, lai to kopējā vērtība būtu **a)** 45 *mondi*, **b)** 46 *mondi*, **c)** 47 *mondi*, turklāt, ja izvēlas kādu monētu, tad nedrīkst ņemt citas monētas, kas atrodas uz vienas taisnes (uzzīmētās līnijas) ar izvēlēto?

Piemēram, ja izvēlas zaļā krāsā iekrāsoto monētu (skat. 4. att.), tad nedrīkst izvēlēties sarkanā krāsā iekrāsotās monētas.

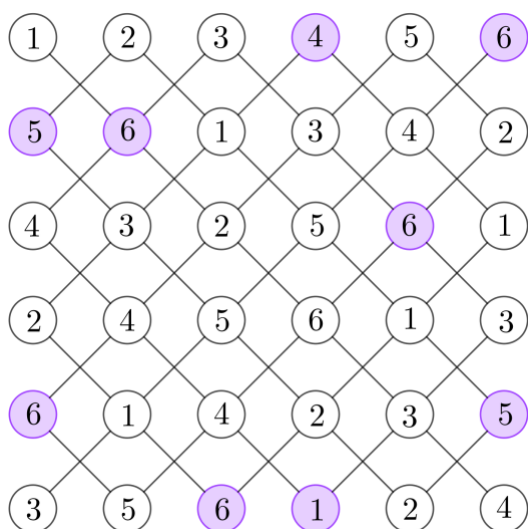


3. att.

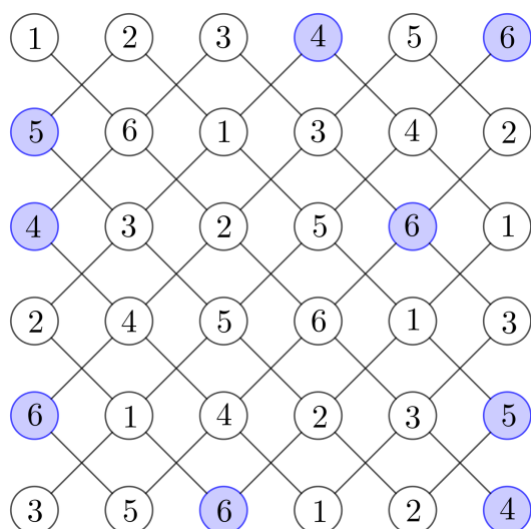


4. att.

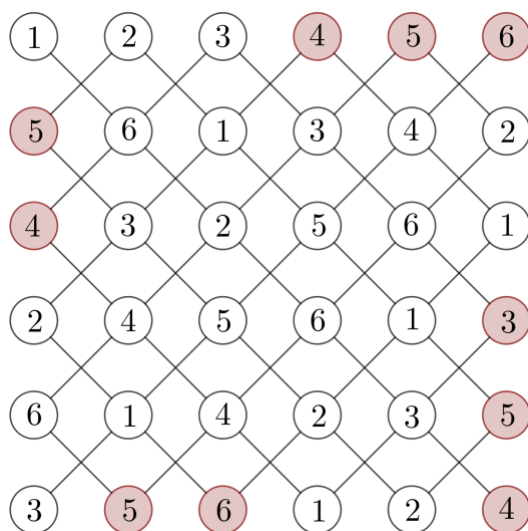
Atrisinājums. Jā, visos gadījumos var izvēlēties monētas, skat. **a)** 5. att., **b)** 6. att., **c)** 7. att.



5. att.



6. att.



7. att.

4. Trīsciparu skaitļi

Alise uz tāfeles uzrakstīja divus trīsciparu skaitļus, kuru starpība ir 8. Agnese aprēķināja katra uzrakstītā skaitļa ciparu summu, un pēc tam abu savu iegūto skaitļu starpību (no lielākā skaitļa atņemot mazāko). Kādu skaitli beigās varēja iegūt Agnese?

Atrisinājums. Apskatīsim iespējamus gadījumus, ņemot vērā mazākā uzrakstītā skaitļa pēdējo ciparu.

- Ja mazākā skaitļa pēdējais cipars ir 0 vai 1, tad otra skaitļa pēdējais cipars attiecīgi ir 8 vai 9, jo tas ir par 8 lielāks. Tā kā nerodas pārnesums, tad skaitļu simtu un desmitu (tas ir, pirmais un otrais cipars) cipari paliek nemainīgi. Līdz ar to uzrakstīto skaitļu ciparu summas atšķiras par 8. Piemēram, ja uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 211 un 219, tad Agnese iegūst skaitli $(2 + 1 + 9) - (2 + 1 + 1) = 8$.
- Ja mazākā skaitļa pēdējais cipars ir 2 vai lielāks, tad radīsies vismaz viens pārnesums. Ja rodas pārnesums, tad ciparu summa katra pārnesuma dēļ samazinās par 9 (jo var rasties tikai pārnesums 1). Tā kā pārnesums var būt tikai divās (vienu vai desmitu) šķirās, tad pārnesumu dēļ ciparu summa var samazināties par 9 vai par 18. Tātad abu apskatāmo skaitļu ciparu summas var savā starpā atšķirties:
 - par $9 - 8 = 1$ (piemēram, ja doti skaitļi 218 un 226, tad $11 - 10 = 1$),
 - par $2 \cdot 9 - 8 = 10$ (piemēram, ja doti skaitļi 299 un 307, tad $20 - 10 = 10$).

Līdz ar to esam pamatojuši, ka Agnese varēja iegūt tikai skaitļus 1, 8 vai 10.

5. JMK rūķi

JMK ciemā dzīvo pieci rūķīši – Elīniņa, Emīliņš, Guniņa, Ilzīte un Marutiņa, katram no tiem ir vai nu rozā, vai melnas brilles. Tie, kas valkā melnas brilles, vienmēr melo, bet tie, kas valkā rozā brilles, vienmēr saka patiesību. Katrs no tiem redz, kādas krāsas brilles ir citiem rūķiem.

Elīniņa saka: “Es redzu 3 rozā un 1 melnas brilles.”

Emīliņš saka: “Es redzu 4 melnas brilles.”

Guniņa saka: “Es redzu 1 rozā un 3 melnas brilles.”

Ilzīte saka: “Es redzu 4 rozā brilles.”

Marutiņa nesaka neko.

Kādas krāsas brilles ir katram rūķītim?

Atrisinājums. Apskatām gadījumu, kad Emīliņam ir rozā brilles, tātad viņš saka patiesību. Līdz ar to pārējiem rūķiem ir melnas brilles un tie visi melo. Iegūta pretruna, jo Guniņa redz 1 rozā un 3 melnas brilles, kas ir patiesība. Tātad Emīliņam ir nevis rozā brilles, bet gan melnas brilles.

Ievērojām, ka Ilzīte melo (jo saka, ka redz 4 rozā brilles), līdz ar to viņai arī ir melnas brilles.

Tā kā diviem rūķiem ir melnas brilles, tad Elīniņa melo, sakot, ka redz 3 rozā un 1 melnas brilles. Tātad arī Elīniņai ir melnas brilles.

Apskatām gadījumu, kad Marutiņai ir melnas brilles. Tādā gadījumā Guniņa melo (“Es redzu 1 rozā un 3 melnas brilles.”), no kā izriet, ka viņai ir melnas brilles. Bet tad sanāk, ka Emīliņš saka patiesību – iegūta pretruna.

Tātad Marutiņai ir rozā brilles. Līdz ar to Guniņa saka patiesību un viņai ir rozā brilles.

Esam pamatojuši, ka Elīniņai, Emīliņam un Ilzītei ir melnas brilles, bet Guniņai un Marutiņai ir rozā brilles.